【論文】

消費者行動の遺産モデルと租税の動学的効果

Bequest Model of Consumer Behavior and Dynamic Effects of Taxes

吉 田 達 雄
Tatsuo Yoshida

＜目次＞

（要旨）
異時点間の消費者行動はライフサイクル・モデルとして定式化されてきたが，政府の公共投資や赤字財政を含めたいっそう一般的な枠組みで無限期間ともいえる長期の問題を考える際には，有限期間の生涯をもつ消費者の行動を無限期間へとつなげていく考慮が欠かせない。遺産と次世代によるその相続によって世代の継続が可能になることから，ライフサイクル・モデルにおいてとくに遺産モデルといわれる動学的な消費者行動モデルが重要となってくる。本論文はその遺産モデルで，通常の消費者行動で使われるものに近い価格効果，富効果のような概念を用いて，賃金税，消費税などが消費経路および遺産水準に与える影響を検討している。たとえば，賃金税と資本課徴は富効果によって各時点の消費と遺産を減少させること，消費税は価格効果によって各時点の消費を増加させ遺産を減少させることなどが明らかにされる。

はじめに

本論文は第一に，通常の価格理論の用語と図解に遺産モデルと呼ばれる消費者行動の分析を接近させようと試みる。民間部門のうち生産部門はごく簡単な内容とされる。消費部門では所与の実物資産をもち生涯の消費経路と遺産を合理的に選択する代表的個人が想定される。消費者行動のこのようなモデルはかなり以前にYaari (1964)によって遺産モデルとして分析された。その時期はいわゆる最適成長論が盛んで彼のような有限期間での経済分析はむしろ珍しいものであった。Atkinson (1971)が述べるように消費や貯蓄へ与える租税の効果を動学的に分析したものは，なおのこと少数であった。本論文は第二に，賃金税，消費税，利子税，貯蓄税，遺産税，資本課徴といった各種の租税が異時点間の選択を行う消費者の行動にどんな影響を与えるのかを統一的な枠組みの中で検討する。

動学的に赤字財政と租税政策で民間部門の行動をコントロールできるかという問題を分析したまとまったものとしてPhelps（1965）とArrow&Kurz（1970）がある。それらが参考にされているが，ここでは彼らよりも限定的な視野でまた異なったモデルで前述の二つの課題に答えようとする。

1. 民間部門の行動

ここでは標準的な成長理論と遺産動機モデルによる代表的個人の消費者行動を合わせた基本モデルを説明する。各時点tで消費されるか資本に付加されるかのいずれにも使える一つの財が仮定される。$Y=$ 総生産，$K=$ 資本ストック，$C=$ 総消費，$L=$ 労働力，$c=C/L=$ 一人当たり消費，$\pi=$ 労働増加率の記号を用いる。また以降ではたとえば$\mathrm{d}K(t)/\mathrm{d}t=K'$ のように各変数についてd/dtを示すのに，またそれ以外でも1変数関数の微分を表すのに’を付けている。総生産が資本蓄積と消費に配分される関係は

（1-1）　$Y(t)=K'(t)+C(t)$

で，生産関数は

（1-2）　$Y(t)=F[K(t),L(t)]$

で示される。Fは2階微分可能な一次同次の凹関数とする。以下の議論を通して総消費や資本を労働成長率πで割り引いておくのが好都合となる。それを

$k=Ke^{-\pi t}$，$c=Ce^{-\pi t}$

と表す。
Fの一次同次性から

（1-3）　$e^{-\pi t}F[K(t),L(\mathrm{t})]=F[k(t),L(0)]\equiv f[k(\mathrm{t})]$

となり，資本の限界生産力は$F_K=\partial F/\partial K=f'(k)$となる。完全競争のもとでは資本の収益率（利子率）$r$は資本の限界生産力に，賃金率は労働の限界生産力$F_L=(\partial F/\partial L)$に等しくなる。オイラーの定理から総生産は資本への帰属分F_KKと労働への帰属分F_LLに残りなく分配され，後者の総賃金をWで表す。消費者が保有する実物資産を$A^M(t)$とすれば，総所得は利子所得に労働所得を加えた

（1-4）　$r(t)A^M(t)+W(t)$

となる。A^MおよびWもπで割引き，$a^M=A^Me^{-\pi t}$，$w=We^{-\pi t}$とする。

経済全体で(4)の総所得が消費と貯蓄（実物資産への付加）に配分されることは

（1-5）　$A^{M}{}'=rA^M+W-C$

と書ける。不確実性はなく合理的に行動する代表的消費者が仮定される。民間部門の消費者が全体で得る効用は，消費者の生涯期間$[0,T]$にわたる一人当たり消費$c^{\sim}=C/L$からの総効用

（1-6）　$V(c^{\sim})=\int_0^T e^{-\rho t}L(t)U[c^{\sim}(t)]\mathrm{d}t$

と一人当たり遺産$a^{M\sim}(\mathrm{T})=A^M(T)/L(T)$からの総効用

(1-7)　$e^{-\rho T}L(T)S[a^{M\sim}(T)]$

の和とする。ここでUは消費効用関数，Sは遺産効用関数，ρは効用割引率である。この種の効用関数に基づく消費者行動はYaari(1964)によって遺産動機問題と呼ばれたものである。

効用関数UおよびSは$1-\sigma$同次（$\sigma>0$）とし$U'>0$，$U''<0$，$S'>0$，$S''<0$また$c^{\sim}\to 0$および$a^{M\sim}(T)\to 0$のとき$\lim U'=\lim S'=\infty$，$c^{\sim}\to\infty$および$a^{\sim}(T)\to\infty$のとき$\lim U'=\lim S'=0$と仮定する。これは限界効用が逓減し$c^{\sim}=a^{M\sim}(T)=0$のような計画が採用され得なくなることを意味する。さらにσは限界効用の弾力性に等しいものと仮定する。すなわち

$$\sigma=-(U''/U')(c^{\sim})=-(S''/S')a^{M\sim}(T)$$

とする。消費経路に関する選好関係が(6)のような効用積分で表されるとき，フィッシャーの時間選好率といわれるものは，ラムゼイ=ケインズの公式と呼ばれる

$$r_c(t)=\rho-[(U''c^{\sim})/U'](c^{\sim\prime}/c^{\sim})=\rho+\sigma(1/c^{\sim})(c^{\sim\prime}/c^{\sim})$$

で示される。

効用関数についての仮定から

$$e^{-\rho t}L(t)U(c^{\sim})=e^{-\rho t}L(0)e^{\pi t}U[c/L(0)]=[L(0)]^{\sigma}e^{-\lambda t}U(c)$$

$$e^{-\rho T}L(T)S[a^{M\sim}(T)]=e^{-\rho T}L(0)e^{\pi t}S[a^{M\sim}(T)/L(0)]=[L(0)]^{\sigma}e^{-\lambda t}S[a^{M}(T)]$$

を得るが，ここで $\lambda\equiv\rho-\pi$と定義した。$a^{M\sim\prime}=e^{-\pi t}A^{M\prime}-\pi a^{M}$だから(5)より

(1-8)　$a^{M\prime}=(r-\pi)a^{M}+w-c$

となる。代表的個人の効用から構成された消費者の最適な行動からは$[L(0)]^{\sigma}$を省くことができるので，モデルの消費者行動は次のように定式化される。

消費者行動：

$$\int_0^T e^{-\lambda t}U[c(t)]\mathrm{d}t+e^{-\lambda T}S[a^{M}(T)]$$

を，制約$a^{M\prime}=(r-\pi)a^{M}+w-c$，$a^{M}(0)$は所与，すべての$0\leqq t\leqq T$で$0\leqq c(t)$のもとで最大化するように$c(t)$，$a^{M}(T)$を選択する。

(1–1)と(1–2)から$K'=F[K(T),L(t)]-L(t)c'(t)=e^{\pi t}f[k(t)]-e^{\pi t}c(t)$となり，$k'=e^{-\pi t}K'-\pi k$だから

(1-9)　$k'=f(k)-\pi k-c$

となる。(1–8)と(1–9)でもしも$a^{M}(0)=k(0)$ならばすべての$0\leqq t\leqq T$で$a^{M}(t)=k(t)$となることがわかり，それゆえ$r=f'(k)$を念頭におけば競争経済の記述で(1–8)を使っても(1–9)を使っても同じことになる。

2.　最適計画の局所的性質

前節の定式化にもう少し定義関係を加えて検討していくことにする。$r_a\equiv r-\pi$とすれば消費者の予算制約式は

(2-1)　$a^{M}{}' = r_a a^M + w - c$

であった。これを$a^M(T)$について解けば

$$a^M(T) = e^{\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t}\{a(0) + \int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u}[w(t) - c(t)]\mathrm{d}t$$

となる。これを変形して

(2-2)　$$\int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} c(t)\mathrm{d}t + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t} a^{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$$

$$= a^M(0) + \int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} w(t)\mathrm{dt}$$

この式は$0 \leqq t \leqq T$における$c(t)$と遺産$a^M(T)$をr_aで割り引いた現在価値の合計が，初期の実物資産$a(0)$と$0 \leqq t \leqq T$に得られる賃金$w(t)$をr_aで割り引いた現在価値の合計に等しいことを示している。右辺第2項は賃金の時間系列を資本化したものと考えられ，これを人的資産$a^H(t)$の初期値と定義しよう。

(2-3)　$a^H(0) = \int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} w(t)\mathrm{d}t$

各時点の人的資産は

$$a^H(t) = \int_0^T e^{-\int_t^v r_a(u)\mathrm{d}u} w(v)\mathrm{d}v$$

と定義される。

実物資産と人的資産の和で総資産$a(t)$を定義する。

$$a(t) = a^M(t) + a^H(t)$$

$a(0) = a^M(0) + a^H(0) = A^M(0) + a^H(0)$であり，特に$a^H(T) = 0$だから$a(T) = a^M(T)$となることに注意しよう。(2-2)の右辺は$a(0)$でこれが消費と遺産へ振り分けることができる最大の値であるから，総資産の初期値$a(0)$を「富」と呼ぶことにしよう。定義された$a^H(t)$が初期値$\mathrm{a}^{\mathrm{H}}(0)$の微分方程式

(2-4)　$a^{H}{}' = r_a a^H(t) - w(t)$

の解になっていることは容易に確かめられる。もちろん(2-4)の解は初期値に依存しているから，人的資産の定義を(2-4)の解で$a^H(T) = 0$とする初期値をもつものと述べてもよい。そのような初期値は(2-3)で与えられることがすぐに知れるからである。

(2-1)に(2-4)を加えて，総資産を用いて制約式(2-1)を書き直しておく。

(2-5)　$a' = r_a a - c$

を得る。したがって消費者の最大化問題は

$$\int_0^T e^{-\lambda t} U[c(t)]\mathrm{d}t + e^{-\lambda T} S[a(T)] \to \max$$

s.t. $a' = r_a a - c$，$a(0)$は所与

と表される。最適な消費・遺産を計画の局所的特性（微分条件という意味で）を見出すの

に，ポントリャーギンの最大値原理を適用できる。最大値原理をとくに公共投資を含む経済成長論に適用したものとしてArrow&Kurz（1969）やDorfman（1970）がある。前者のp.37には遺産効用関数に相当するものをスクラップ・ヴァリューとして取り入れた形で最大値原理が述べられている。補助変数を$p(t)$としたハミルトニアンは

$$H=U(c)+p(r_a a-c)$$

となりcはこれを最大化する必要があり$\partial H/\partial c=0$すなわち$U'(c)=p$，また$p(t)$は$p'/p=\lambda-r_a$を満たす必要がある。富$a(0)$は体系の既知事項だから終期条件$p(T)=S'[a(T)]$で最適計画の条件がそろう。

定理1. 消費者の最適計画は微分方程式

（a）　$a'=r_a a-c$

（b）　$p'/p=\lambda-r_a$

と条件

（c）　$U'(c)=p$

（d）　$p(T)=S'[a(T)]$

を満たすものである。

$p(0)$を定めると（c）から$c(0)$が定まり，（b）の解として$p(t)$したがって$c(t)$が決定される。$p(T)$に対応して$a(T)$が（d）より決まる。つまり$p(0)$を選べば（b），（c），（d）から$[0, T]$での消費$c(t)$と遺産$a(T)=a^M(t)$が決まるのである。最適な計画はそのうち予算制約（a）を満たすものとなる。

この定理1をやや異なった表現に言い換えることができる。（c）を（b）に代入して

$$\mathrm{d}(\log U')/\mathrm{d}t=\lambda-r_a$$

したがって

$$r_a(t)=\lambda-\mathrm{d}(\log U')/\mathrm{d}t=r_c-\pi$$

ここでr_cは前節で述べた時間選好率である。ゆえに定理1の条件（b）と（c）は

$$r(t)=r_c(t)$$

すなわち利子率と時間選好率が等しいという条件と同値である。（1-5）のような資産蓄積方程式に対して，ある期間$[t, t+\Delta t]$の一人当たり消費$\tilde{c}$を$\Delta\tilde{c}$だけ減少し，他の機関$[t', t'+\Delta t]$に$\Delta\tilde{c}'$だけ増加させたときにt時点と$t'+\Delta t$で実物資産A^Mが不変であるとき，$\Delta t\to 0$と$\Delta c'\to 0$とした極限値limliim$(\Delta\tilde{c}'/\Delta\tilde{c})$は，2時点$t$と$t'$での限界変換率と呼ばれる。さらにその変化率は瞬時的な限界変換率（単に限界変換率とも）と呼ばれる。（1-5）に対してこの限界変換率を計算すればそれが利子率$r(t)$に他ならないことがわかる。それゆえ，利子率と時間選好率の相等は「限界変換率＝時間選好率」と読める。定理1の（d）はT時点で限界的な財を消費してしまうか遺産として残すかの選択における限界条件

$$U'[c(T)]=S'[a(T)]$$

である。

なお，T時点以外の消費と遺産との限界効用条件は

(2-6) $U'[c(t)]\ e^{-\int_0^T [r_a(u)-\lambda]\mathrm{d}u} = S'[a(T)]$

であり，これは次のようにして求められる。(b)から

$$p(t) = p(0)\,e^{\int_0^T [\lambda - r_a(u)]\mathrm{d}u}$$

でとくに

$$p(T) = p(0)^{\int_0^T [\lambda - r_a(t)]\mathrm{d}t} = S'[a(T)]$$

したがって

$$S'[a(T)] = \{p(\mathrm{t})\,e^{-\int_0^T [\lambda - r_a(u)]\mathrm{d}u}\}\,e^{\int_0^T [\lambda - r_a(t)]\mathrm{d}t}$$

を得る。これまでのことをまとめ，また(a)を積分形で書けばいっそう経済学的表現の定理1'となる。

定理1'. 消費者の最適計画は，予算制約

(a) $\int_0^T e^{-\int_0^T [r_a(u)]\mathrm{d}u}\, c(t)\,\mathrm{d}t + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t} a(T) = a(0)$

と限界変換率と時間選好率が等しくなること

(b) $r(t) = r_c(t)$

および期末の限界条件

(c) $U'[c(T) = S'[a(T)]$

を満たすものである。

定理1の条件は十分でもあり，それを示す過程で最適計画の一意性も明らかになる。

定理2. 定理1の(a)～(d)は十分条件でもあり，また最適計画は一意的に定まる。

これは次の計算からわかる。$a^1(0) = a_0$と定理1の条件(a)～(d)を満たす実行可能な計画を$c^1(t)$，$a^1(t)$とし，これに付随する補助変数を$p(t)$とする。同じ大きさの富$a^2(0) = a_0$をもち定理1の(a)を満たす他の任意の実行可能な計画を$c^2(t)$，$a^2(t)$とする。このとき

$$v(c^1) - v(c^2) = \int_0^T e^{-\lambda t}[u(c^1) - u(c^2)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T e^{-\lambda t}[u(c^1) - u(c^2) - p(c^1 - c^2) + p(c^1 - c^2)$$

$$+ p(r_a a^1 - c^1 - a^{1\prime}) - p(r_a a^2 - c^2 - a^{2\prime})]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T e^{-\lambda t}[(pr_a + p' - \lambda p)(a^1 - a^2)dt - [e^{-\lambda t}p(a^1 - a^2)]_0^T$$

不等号への移行はUが強凹であることと

$$\int_0^T e^{-\lambda t}\,p(a^1 - a^{2\prime})\,\mathrm{d}t$$

の部分積分による。さらに条件(b)を適用すれば結局

$$V(c^1) - V(c^2) \geq [e^{-\lambda t}p(a^1 - a^2)]_0^T$$

$= e^{-\lambda T}p(T)[a^1(T) - a^2(T)]$

となる。Sの強凹性と条件(d)を使うと

$\{V(c^1) + e^{-\lambda T}S[a^1(T)]\} - \{V(c^2) + e^{-\lambda T}S[a^2(T)]\} > e^{-\lambda T}p(T)[a^1(T) - a^2(T)] + e^{-\lambda T}S'[a^1(T)] - a^2(T)] = 0$なので一意性が証明された。

3. 富効果と価格効果

この節では定理1と定理1'が示す消費者の最適行動を2次元平面上での無差別曲線と変換曲線による図解を考え，理解を直感的にも確実なものとするよう努める。この図解のアイディアとなるものはGoldman(1969)から得ている。現世代の生涯[0, T]における消費からの効用を$V(c)$で表す。

$$(3\text{-}1)\quad V(c) = \int_0^T e^{-\lambda t} v[c(t)]\mathrm{d}t$$

これを最適消費計画に沿って全微分し

$$\mathrm{d}V = \int_0^T e^{-\lambda t} v'(c)\,\mathrm{d}c\mathrm{d}t$$

を得る。定理1の(b)，(c)から最適な消費計画は$U'(c) = p$としたときに$p'/p = \lambda - r_a$の性質を有している。また$a' = r_a a - c$より$\mathrm{d}c = r_a\mathrm{d}a - \mathrm{d}a'$で$e^{-\lambda t}p(t) = q(t)$とすれば$q'/q = p'/p - \lambda = -r_a$だから

$$\mathrm{d}V = \int_0^T q(r_a\mathrm{d}a - \mathrm{d}a')\,dt = \int_0^T q\left(-\frac{q'}{q}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}t - \int_0^T q\mathrm{d}a'dt$$

$$= \int_0^T - q'\mathrm{d}a\mathrm{d}t - \int_0^T q\mathrm{d}a'dt$$

部分積分して$\mathrm{d}V = p_0\mathrm{d}a_0 - e^{-\lambda T}p_T\mathrm{d}a_T$を得る。すなわち

$$(3\text{-}2)\quad \frac{\partial V}{\partial a_0} = p_0,\ \frac{\partial V}{\partial a_T} = e^{-\lambda T}p_T,\ \left.\frac{\partial at}{\partial a_0}\right|_{\mathrm{v} = \mathrm{const.}} = \frac{P_0}{e^{-\lambda t}P_T}$$

これは最適計画がもつa_0, a_T, V間の変換率を示しており，それらの符号は$\partial V/\partial a_0 > 0$, $\partial V/\partial a_T < 0$, $\partial a_T/\partial a_0 > 0$となっている。

定理3. a_0, a_T, Vを関連づける変換曲線は(a_0, a_T, V)空間で凸である。

このためには効率的な二つの計画の凸結合が実行可能であるならばよく，以下のようにして確認できる。二つの効率的な計画を(c^1, a^1)，(c^2, a^2)とし対応するVの値をV^1，V^2とする。次のような二つの計画の凸結合で定義される計画(c^α, a^α)を考える。$0 < \alpha < 1$に対して

$$c^\alpha(t) = \alpha c^1(t) + (1 - \alpha)c^2(t)$$

$$a^\alpha(t) = \alpha a^1(t) + (1 - \alpha)a^2(t)$$

とするのである。このような計画が実行可能すなわち予算制約を満たすことは容易に確かめられる。

$a^{\alpha}{}'(t) = \alpha a^{1}{}'(t) + (1 - \alpha)a^{2}{}'(t) = \alpha[r_a a^1(\mathrm{t}) - c^1(t)] + (1 - \alpha)[r_a a^2(t) - c^2(t)] = \mathrm{r_a}[\alpha a^1(t) + (1 - \alpha)a^2(t)] - [\alpha c^1(t) + (1\text{-}\alpha)c^2(t)] = r_a a^\alpha(t) - c^\alpha(t)$

次にUが強凹であることから，実際のところ計画(c^α, a^α)が$\alpha V^1 + (1 - \alpha)V^2$よりも大きな消費

効用をもたらすことをみてみる。

$$V(c^{\alpha})= \int_0^T e^{-\lambda t}\ U[c^{\alpha}(\mathrm{t})]\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-\lambda t} U[\alpha c^1(\mathrm{t}) + (1-\alpha)c^2(\mathrm{t})]\,\mathrm{d}t$$

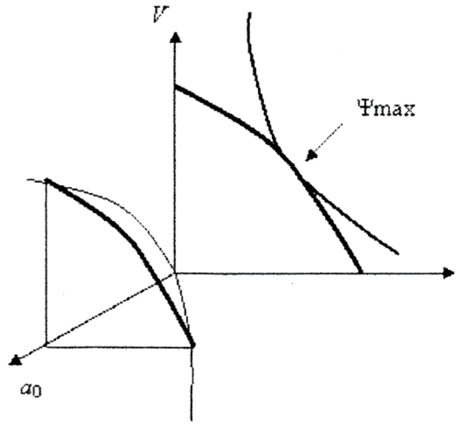
$$> \alpha\int_0^T e^{-\lambda t}\ U[(c^1(\mathrm{t}))]\,\mathrm{d}t + (1-\alpha)\int_0^T e^{-\lambda t} U[c^2(\mathrm{t}))]\,\mathrm{d}t$$

$$= \alpha V^1 + (1-\alpha)\ V^2$$

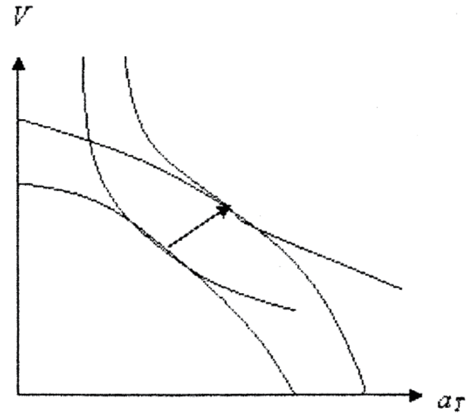
系3. 任意の$a_0 > 0$に対してVとa_Tを関連づける変換曲線は(a_T, V)平面で凸となる。
集合$\mathrm{X} = \{(a_0, a_T, V) : a(0) = a_0, a(T) = a_T, V(r_a a - a')$が実行可能$\}$は前定理より凸集合で，2点$(a_0, a_T{}^1, V^1) \in \mathrm{X}$, $(a_0, a_T{}^2, V^2) \in \mathrm{X}$をとれば$0 < \alpha < 1$に対して
$(a_0, \alpha a^{T1} + (1-\alpha)a^{T2}, \alpha V^1 + (1-\alpha)V^2) \in \mathrm{X}$だから集合$\mathrm{Y} = \{(a_T, V)$：一定の$a_0$に対して$(a_0, \mathrm{a_T}, V) \in \mathrm{X}\}$もまた凸集合となる。
さらに消費者の総効用関数Ψ

$$\Psi(V, a_T) = V + e^{-\lambda T}S(a_T)$$

が強凹であることがSの強凹性から導かれる。消費者は所与のa_0に対して実行可能な(a_T, V)の中から$\Psi(V, a_T)$を最大とするa_TとVの組を選択する。Vには一意的消費計画が対応しているので消費者の選択は完全なものとなる。
図形的には(a_T, V)平面上での無差別曲線とa_0を所与として描かれた変換曲線とが接するところで消費者の選択が示される（図1)。



［図 1］



［図 2］

最適条件は通常のように限界変換率と限界代替率とが等しいこと

$$\frac{\partial V}{\partial a_T} = \left.\frac{dV}{da_T}\right|_{\Psi = \mathrm{const.}}$$

であって，(2-2)から左辺は$e^{-\lambda T}p_T$, 右辺は$-e^{\lambda T}S'(a_T)$だからこの条件は定理1の(d)に他ならない。Vには定理1の条件(a)，(b)，(c)を満たす消費経路が伴っているので，これにより$[0, T]$の$c(t)$を単一の数値Vにアグリゲートした形で消費者の選択が示されたことになる。

富$a(0)$の変化により消費や遺産はどのように影響されるだろうか。また各時点の消費は経済学的には別個の財とみなすべきものであるが，それらの相対価格は利子率に関係している。この利子率に変化が生じた場合に消費水準や遺産はどう変わるだろうか。これが次に吟味される課題である。

富$a(0)$の変化が消費者の最適計画(c, a_T)，$V(c)$に与える効果を富効果と呼ぶことにしよう。Yaari（1964）にならって最適計画(c, a_T)をa_0の関数とみて定理1'の(a)の予算制約式をa_0で偏微分すると

$$(3\text{-}3)\quad \int_0^T e^{-\int_0^T r_a(u)\mathrm{d}u}\frac{\partial c}{\partial a_0}\,\mathrm{d}t + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t}\frac{\partial a_T}{\partial a_0} = 1$$

となる。同様に達成可能な最大効用もa_0の関数とみて偏微分し

$$(3\text{-}4)\quad \Psi'(a_0) = \int_0^T e^{-\lambda t}V'[c(t)]\frac{\partial C}{\partial a_0}\,\mathrm{d}t + e^{-\lambda T}S'(a_T)\frac{\partial a_T}{\partial a_0}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial a_0} + e^{-\lambda T}S'(a_T)\frac{\partial a_T}{\partial a_0}$$

これに(2-6)を代入して(3-3)を用いれば

$$(3\text{-}5)\quad \Psi'(a_0) = e^{\int_0^T[r_a(t)-\lambda]}S'(a_T) = e^{\int_0^t[r_a(u)-\lambda]\mathrm{d}u}U'[c(t)]$$

(3-4)を再びa_0で微分して単純化すれば

$$\Psi''(a_0) = \int_0^T e^{-\lambda t}U''[c(t)]\left(\frac{\partial C}{\partial a_0}\right)^2\mathrm{d}t + e^{-\lambda T}S''(a_T)\left(\frac{\partial a_T}{\partial a_0}\right)^2$$

$U''<0$，$S''<0$なのでこれは常に負となる。(3-5)をa_0で微分して$\Psi'(a_0)<0$を使えば$\partial a_T/\partial a_0 > 0$なので(3-5)の右側の式から$\partial c(t)/\partial a_0 > 0$がわかりそれゆえ$\partial V/\partial a_0$もまた正である。こうして富効果はすべて正となることがわかった。

定理7. 富効果はすべて正である。すなわち

$$\partial c(t)/\partial a_0 > 0\ (0 \leqq t \leqq T),\quad \partial a_T/\partial a_0 > 0,\quad \partial V/\partial a_0 > 0$$

横軸にa_Tを縦軸にVをとった先の図で富効果は，変換曲線が外側へ広がり，最適点が右上方への移動として示される（図4）。

次に利子率の変化による価格効果の検討を行ってみる。相対価格の変化に基づく無差別曲線に沿っての均衡値の移動，すなわち代替効果を(a_T, V)平面で示すことは一般的に困難であるから，ここでは限界効用逓減の仮定を保持しつつどの程度のことがいえるかを考察することにする。利子率の変化は消費と貯蓄の相対価格を変えると共に$a(0)$をも変化させて富効果も引き起こす。そこで富$a(0)$に変化がなくても生じるであろう効果を利子率効果と呼んでこれを調べることにする。それには効用関数についての明示的な情報が必要となる。

限界効用U'およびS'が一定の弾力性σをもつとしたことを想起すれば，一般性を失うことなく

$$U'(c) = c^{-\sigma},\quad S'[a(T)] = a(T)^{-\sigma}$$

とすることができる。定理1の(b)と$\mathrm{d}(\log c^{-\sigma})/\mathrm{d}t = \lambda - r_a$から

$c'/c = [r_a(t) - \lambda]/\sigma$

右辺を$\alpha(t)$で表すと

(3-8)　$c(t) = c(0)e^{\int_0^t \alpha(u)\mathrm{du}}$, $\mathrm{c}(T) = c(0)e^{\int_0^T \alpha(t)\mathrm{dt}}$

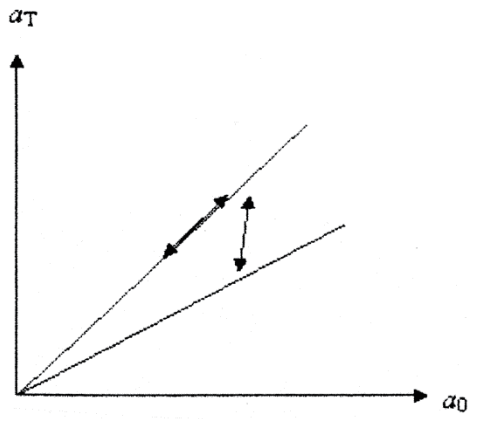
で，定理1'の(c)から$c(T) = a(T)$となり

(3-9)　$c(0) = a(T)e^{-\int_0^T \alpha(t)\mathrm{dt}}$

(3-9)を(3-8)に代入したc(t)を定理1'の予算制約式に代入すれば

(3-10)　$a(T)[\int_0^T e^{-\int_0^T r_a(u)\mathrm{du}} e^{-\int_t^T \alpha(u)\mathrm{du}} dt + e^{\int_0^T r_a(t)\mathrm{dt}}] = a(0)$

[ ]の中はプラスだから$a(0)$と$a(T)$は正の相関関係にある。その係数は利子率の時系列$r(t)$に依存している。$a(0)$自体も定義から$r(t)$に依存しているがその構成要素のうち利子率に無関係な実物資産の初期値$a^M(0)$が下落して$a(0)$が減少したとき（これは資本課徴によって起こる），明らかに遺産もまた減少する。図5で同一線上の左下への移動でこれが示されている。もしも$[0, T]$すべてで$\alpha(t) \geqq 0$すなわち$r(t) \geqq \lambda + \pi$であれば任意の時点での利子率上昇は(3-10)の[ ]を減少させ図5の直線の傾きを小さくして$a^M(0)$の減少による$a(0)$および$a(T)$の減少が起こる。$a(0)$が増大するときは上に述べたことの逆のこととなりこれが図3に示されている。$a(0)$に変化がないとき利子率の上昇が$a(T)$を減少させ，利子率の低下が$a(T)$を増加させるのはいうまでもない。



[図 3]

次に利子率変化が消費に及ぼす効果をみてみよう。(3-9)より利子率の上昇は$a(T)$と$c(T)$だけでなく$c(0)$も減少させることがわかる。$r(j)$（$t \leqq j$）が上昇すると$c(t)$（$t \leqq j$）も減少することが(3-8)から知られ，$r(j)$（$j \leqq t$）が上昇すると$c(t)$（$j \leqq t$）が減少することもわかる。

定理4.　限界効用の弾力性が一定のσとし，かつすべての$[0, T]$で$r(t) \geqq \lambda + \pi$とする。このとき任意の時点の利子率上昇は$a(0)$が不変のときすべての時点で$c(t)$したがって$V(c)$また$a(T)$を減少させる。利子率低下の場合には逆の結果となる。

4.　租税の動学的効果

これまでの分析を踏まえてそこに各種の租税を導入してその効果を検討しよう。そのためにまず政を含む会計的関係をみなければならない。これにはArrow & Kurz（1970）の参照が有益でここでも彼らにならって定式化していく。租税がない場合，民間部門の消費者は（1-4）の総所得$rA^M + W$を消費Cと貯蓄$A^{M}{}'$に配分する。

（4-1）　$A^{M}{}'(t) = r(t)A\ (t) + W\ (t) - C\ (t)$

この関係が租税導入によってどう変わるかをみていくことになる。

はじめに総所得$rA^M + W$がいかに「支出」されるかに関わる2種の税，消費税と貯蓄税をとりあげる。貯蓄税という課税形態がなじみにくければ，符号を変えて貯蓄補助金と解釈してもよい。これらそれぞれの税率をx_c，x_sで表示しよう。もしも消費支出がC_Eの大きさ消費者として個人が享受する現実の消費は$C = (1 - x_c)\,C_E$となる。すなわち$C_E = C/(1 - x_c)$の関係となる。消費税率の表示でCに対する税率を想定してその（1+税率）倍がC_Eとなるようにするのがより標準的かもしれないが，両者は容易に一方から他方へ変換できるので二つの表示法はまったく互換的なものである。ここで採用したものだと$x_c = x_s = x$のように消費と貯蓄に等しい税率xで課税するのが所得税となるので少しばかり便利である。消費税と貯蓄税によって（4-1）は

$$A^{M}{}' = (1 - x_s)\,\{rA^M + W - [C/(1 - x_c)]\}$$

となる。表記が簡単化されるように

$$z_c = 1 - x_c,\quad z_s = 1 - x_s,\quad v = z_s/z_c$$

とすれば上式は

$$A^{M}{}' = z_s r A^M + z_s W - vC$$

と書ける。

次に代替的な課税の可能性すなわち所得源泉別の租税も考えておこう。賃金と資産所得（利子と呼んでいく）に課される税がそれらで税率をそれぞれx_wとx_r，前と同様に

$$z_w = 1 - x_w,\quad z_r = 1 - x_r$$

とする。これらによって（4-1）は

$$A^{M}{}' = z_r r A^M + z_w W - C$$

となる。

最後に4つの税を同時に考慮しパラメータの積について$z_{ab} = z_a z_b$のように書くこととする。4種の税を同時に取り込むと（4-1）は

（4-2）　$A^{M}{}' = z_{sr} r A^M + z_{sw} W - vC$

となる。所得税を考えるときには，賃金と利子所得の双方に課税せず消費と貯蓄に同率課税するか，あるいは消費にも貯蓄にも課税せず賃金と利子所得に同率課税するものとする。政府支出はないものとする。

均衡状態では$A^M = K$だから，(4-2)は

(4-3)　$K' = z_{sr} r\, K + z_{sw} W - vC$

でもある。ここでも各変数を労働人口成長率πで割り引いたa^M，w，cを使うのが便利となる。これらを使えば(2-1)に租税を含めた

(4-4)　$a^{M}{}' = (z_{sr} r - \pi)\, a^M + z_{sw} w - vc$

が得られる。他方，最大化の目的関数は第1節の

$$\int_0^T e^{-\lambda t} U[c(t)]\mathrm{d}t + e^{-\lambda T} S[a^M(T)]$$

で変わらない。ハミルトニアンは補助変数を$p(t)$として

$$H = U(c) + p[(z_{sr} r - \pi)\, a^M + z_{sw} w - vc]$$

ポントリャーギンの必要条件は$\partial H/\partial \mathrm{c} = 0$すなわち

$$U'(c) = pv$$

と微分方程式

$$p'/p = \lambda - z_{sr} r + \pi$$

を満たすことで，終期条件は

$$p(T) = S'[a^M(\mathrm{T})]$$

となる。またこれらから

$$\mathrm{d}(\log U')/\mathrm{d}t - v'/v = \lambda - z_{sr} r + \pi$$

が導かれ，この式は第2節で示したように時間選好率が$r_c = \lambda + \pi - \mathrm{d}(\log U')/\mathrm{d}t$であったから$r_c = z_{sr} - v'/v$というのに等しい。以上をまとめて次となる。

定理5．賃金税，利子税，消費税，貯蓄税が導入されたときの最適な消費と遺産の計画は以下の条件によって決まるものとなる。

(a)　$a^{M}{}' = (z_{sr} r - \pi)\, a^M + z_{sw} w - vc$

(b)　$U'(c) = pv$

(c)　$p'/p = \lambda - z_{sr} r + \pi$

(d)　$p(T) = S'[a^M(\mathrm{T})]$

このうち(b)と(c)は

(e)　$r_c = z_{sr} - v'/v$

というのに等しい。

簡単化のため租税はすべて0時点に導入されるものとし，税率は時間的に一定と仮定する。

$r_z \equiv z_{sr}r - \pi$とし定理5の(a)を積分すると

$$(4\text{-}1)\ \int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} vc\mathrm{d}t + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t} a^M(\mathrm{T}) = a^M(0) + \int_0^T e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} z_{sw}w\mathrm{d}t$$

が得られるがこの右辺は課税後の富の大きさを表している。租税によって賃金割引要素(価格と表現しておく)が税がないときの $e^{-\int_0^t r_a \mathrm{d}u}$ から $e^{-\int_0^t (z_{sr}r-\pi)\mathrm{d}u} z_{\mathrm{sw}}$ に変わりそのために人的資本が減少するからである。$c(t)$の価格は $e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u}$ でv=1のときにのみ$c(T)$と$a^M(T)$のそれが同じになる。

まず簡単な賃金税の効果をみるために$z_{sr} = 1$, $v = 1$, $z_{sw} = z_w$としてみよう。そうすると賃金税は人的資産を減少させることによって富を減らし，第3節の定理7が述べる富効果によって各時点の$c(t)$と遺産$a^M(T)$を減少させることになる。定式化に含めていないが0時点に導入される資本課徴の効果も同様である。

次に消費税について検討する。このときには$v = 1/z_c$で$z_{sr} = 1$, $z_{sw} = 1$とされる。$0 < x_c < 1$のとき$v > 1$だから消費税導入前と比べて消費価格が上昇する。したがって消費と貯蓄の代替が起こり消費の減少，貯蓄および遺産の増加が予想される。これを確かめるのに前節で用いた限界効用の弾力性がσとなる$U'(c) = c^{-\sigma}$, $S'(a_T) = a_T^{-\sigma}$を仮定しよう。定理5の(b)と(c)から$c'/c = r - \pi - \lambda$となるので，一定の消費税は$c(T)$と$a^M(T)$の相対価格を変えても消費相互の相対価格は変わらず消費の伸び率には何の変化も与えない。定理5の(d)は現在の場合$c_T^{-\sigma} = (1/z_c)\,a^M{}_T{}^{-\sigma}$となる。これより$z_c^{-(1/\sigma)}c_T = a^M T$あるいは$c_T = z_c^{1/\sigma} a^M{}_T$を得る。$0 < x_c < 1$ならば$z_c^{1/\sigma} < 1$, $z_c^{-(1/\sigma)} > 1$となっている。前節の$\alpha(t) = [r_a(t) - \lambda]/\sigma$によって表すと$\mathrm{c}(\mathrm{t}) = \mathrm{c}(0)\,\mathrm{e}^{\int_0^t \alpha(u)du}$とくに$\mathrm{c}(\mathrm{T}) = \mathrm{c}(0)\ \mathrm{e}^{\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t}$ だから

$$c(0) = z_c^{1/\sigma} e^{-\int_0^T \alpha(t)\mathrm{d}t} a^M(T)$$

また

$$c(t) = z_c^{1/\sigma} e^{-\int_0^T \alpha(u)\mathrm{d}u} a^M(\mathrm{T})$$

これを(4-1)の左辺に代入して

$$a^M(T)\{\int_0^T e^{\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} z_c^{(1-\sigma)/\sigma}\ e^{-\int_t^T \alpha(u)\mathrm{d}u} dt + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t}\} = a(0)$$

右辺の富$a(0)$は消費税によって影響されず$z_c^{(1-\sigma)/\sigma} < 1$だから消費税がない場合と比べて{ }の中が小さくなり$a^M(T)$は消費税がないときよりも増加する。

同じように

$$c(t) = e^{-\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} c(T)$$

$$a^M(T) = z_c^{-1/\sigma} c(T)$$

を(4-1)に代入すれば

$$c(T)\{\int_0^T e^{\int_0^t r_a(u)\mathrm{d}u} \left(\frac{1}{Z_c}\right) e^{-\int_0^T \alpha(u)\mathrm{d}u} dt + e^{-\int_0^T r_a(t)\mathrm{d}t} z_c^{-(1/\sigma)}\} = a(0)$$

となり$1/z_c > 1$, $z_c^{-1/\sigma} > 1$から{ }の中は消費税がないときと比べて大きくなっている。$a(0)$が不変なので$c(T)$は消費税がないときと比べて減少し，$c(0)$さらに各時点の消費$c(t)$も減少させる。

富効果と価格効果の両方をもたらす貯蓄税，利子税の効果については残念ながら確定的なことはいえない。利子税は資産の収益率を引き下げることだから利子率低下と同じ効果を発揮する。したがって前節の定理8のようなことがそこでの前提下でいえるにすぎない。所得税は，消費と貯蓄に同率の税率xで課税するものだから(4-1)で$1 - x = z$とし$z_{sr} = z_s = z$, $z_{sw} = z$，$v = 1$と置く。当然だが所得税も富効果と価格効果の両方を生じるのでやはり明確なことはいえない。

最後に，定式化に含めていなかった遺産税（納税義務者は相続資産を残した者となる）について調べてみよう。このときに消費者は税引き後の遺産から効用を引き出すとするのが自然であろう。遺産税率をx_aとしたとき効用関数は

$$\int_0^T e^{-\lambda t} U[c(t)]\mathrm{d}t + e^{-\lambda T} S[(1 - x_a)a^M(T)]$$

となる。定理9の(d)だけが変わりそれは

$$U'[c(T)] = (1 - x_a)S'[(1 - x_a)a^M(T)]$$

となる。前と同様に$U'[c(T)] = c(T)^{-\sigma}$，$S'[(1 - x_a)a^M(T)] = (1 - x_a)^{-\sigma}a^M(T)^{-\sigma}$
として前式より

$$c(T) = (1 - x_a)^{-(1-\sigma)/\sigma}a^M(T)$$

ここで$(1 - x_a)^{-(1-\sigma)/\sigma} > 1$だから消費税の場合とちょうど逆になる。遺産税は主観的評価において$c(T)$と$a^M(T)$の相対価格を変え価格効果を引き起こすのである。消費税のときと同様の計算を繰り返すことはせず，結果だけを述べておく。遺産税は遺産水準を低下させ各時点の消費$c(t)$を減少させる。

これまでの結果が次にまとめられる。

定理6．各租税は0時点に導入され$[0, T]$で一定とする。このとき次の効果がみられる。

(a) 賃金税と資本課徴は富効果によって消費$c(t)$ ($0 \leqq t \leqq T$) と遺産$a^M(T)$を減少させる。
(b) 消費税は価格効果によって消費$c(t)$ ($0 \leqq t \leqq T$) を減少させ遺産$a^M(T)$を増加させる。
(c) 遺産税は効用評価麺の価格効果によって消費$c(t)$ ($0 \leqq t \leqq T$) を増加させ遺産$a^M(T)$を減少させる。
(d) 富効果と価格効果のいずれも引き起こす貯蓄税，利子税，所得税の効果は確定的でない。

むすび

各種の租税が異時点間の資源配分や消費者行動に及ぼす影響を調べることは目新しい課題ではない。参照した文献もしたがって年代の古いものが多い。有限期間モデルの採用は個人の生涯が有限であることから自然なものとなるが，連続形のモデルでしかもそれを静態的な通常の価格理論とそこでの検討に整然と対応づけられないものだろうか，この疑問にある程度答えながら，体系的整理もしつつ課題を検討したところに本論文の意義がある。

〔参考文献〕

［１］宇沢弘文（1964）「最適経済成長論の再検討：解説」, 季刊理論経済学, vol.20

［２］Arrow, K. J. and M. Kurz（1970）*Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Johns Hopkins University Press

［３］Atkinson, A. B.（1971）“Capital Taxes, the Redistribution of Wealth and Individual Savings,” Review of Economic Studies, Vol.38

［４］Cass, D. and Yaari, M. E.（1971）“Present Values Playing the Role of Efficiency Prices in the One-Good Growth Model,” Review of Economic Studies, vol. 38

［５］Dorfman, R.（1969）“An Economic Interpretation of Optimal Control Theory,” American Economic Review, col. 59

［６］Goldman, S. M.（1969）“Sequential Planning and Continual Planning Revision,” Journal of Political Economy, vol. 77

［７］Green, H. A. J.（1964）*Aggregation in Economic Analysis*, Princeton University Press

［８］Liviatan, N.（1966）“Multiperiod Future Consumption as an Aggregate,” American Economic Review, vol. 56

［９］Phelps, E. S.（1965）*Fiscal Neutrality toward Economic Growth*, McGraw-Hill

［10］Yaari, M. E.（1964）“On the Consumers Lifetime Allocation Process,” International Economic Review, vol. 5

Abstract

In the 1960s many studies have been done in the field of optimal economic growth. Several of those studies tried to investigate the economic role of the public sector with emphasis on deficit finance and public investment. In this paper, we only deal with the economic effects of various taxes and we adopt a bequest motive model of consumer behavior. Our theoretical attempt is to make an intertemporal consumer choice theory more look like a familiar static price theory. For that purpose, a rigorous analysis is made with such terms as price effects and wealth effects. The second purpose of this paper is to present a systematic framework which may be used as a kind of standard framework to analyze the effects of government policies. Although the obtained results concerning the effects of various taxes might not have anything new, we hope the style of our discussion contains some useful characteristics for further consideration.

付記：本論文は平成23年度商学部研究費（共同研究）の研究成果の一部である。