【論文】

多数決と論理
―社会的選択理論と論理学―

Majority voting and logical reasoning
—Social choice theory and logic—

竹　村　　　亮
TAKEMURA Ryo

目次

（要旨）

本稿ではまず，多数決と論理推論の間の矛盾を表す Condorcet のパラドクスとその一般化である discursive paradox を紹介する。続いて，それらのパラドクスの研究から発展した Arrow の定理および不可能性定理について判断集約理論の枠組みで概説する。本稿ではさらに，パラドクスの証明論的分析を行うために，判断集約理論に基づく多数決付きの推論システムを導入する。そのシステムを用いて，先行研究で議論されてきたパラドクスの回避方法である前提多数決方式および結論多数決方式の証明論的分析を行う。

1　はじめに

社会的，つまり集団での意思決定においては，どのような意見集約方法を用いるかが問題となる。たとえば，ゼミで合宿先を決める場合から国政に至るまで，全員が合意するまで（何時間でも）話し合う，一人のリーダーが（独裁的に）決める，くじ引きで（運に任せて）決める，等々さまざまな意見集約方法が用いられる。なかでももっとも広く用いられる方法は多数決・投票であろう。多数決は方法的にもシンプルで，ある程度の説得力があるように思われる。しかしながら，18 世紀にフランスの Condorcet によって，多数決は論理推論と矛盾する場合があることが示された。誰もが認める前提から正しい論理推論によって得られた結論は，基本的には誰もが認めるようなものであろう。論理推論が，どんな場合にも絶対ではないかもしれないが，少なくとも論理推論と矛盾しない方が好ましいだろう。

それでは，論理推論と矛盾しないような意見集約の方法としては，どのような方法がありうるのだろうか？ 1972 年にノーベル経済学賞を受賞したアメリカの経済学者 Kenneth Arrow は，Condorcet の結果を基に Arrow の定理を確立した。Arrow の定理は，論理推論と矛盾しないことを含むいくつかの「まっとうな」（民主的な？）条件の下では，独裁的でない意見集約は不可能であるという社会的選択理論における定理である。Arrow の定理は近年，論理学の観点からより一般的な判断集約理論（Judgement aggregation theory）の枠組みで考察されている。

本稿ではまず 2 節で Condorcet のパラドクスを紹介する。3 節では，判断集約理論とその枠組みにおける不可能性定理について概説する。Arrow の定理は判断集約理論における不可能性定理の特殊形として得られる。4 節では，論理学における証明論の観点から，多数決を推論規則の一つとして含む推論システムを導入し，Condorcet のパラドクスについて証明論的に分析する。さらに先行研究で盛んに議論されている前提多数決方式および結論多数決方式によるパラドクスの回避策について証明論的に分析する。これまでの先行研究は意味論的な分析が主であり，証明論的な手法の適用は少ない。((Porello, 2017) は数少ない証明論的な研究のうちの 1 つである。）証明論的な手法を用いる利点は，証明図によって結論の導出過程や矛盾の生じる過程をステップバイステップで分析できる点である。最後に 5 節で本稿のまとめと，今後の課題について述べる。また，6 節では本稿の補論として，不可能性定理の証明の概略を記しておく。

本稿では紙幅の都合上，ある程度の論理学の知識を前提としている。論理学の知識を前提としない判断集約理論のイントロダクションとしては，たとえば（List, 2012; Grossi and Pigozzi, 2014）が挙げられる。また，判断集約理論のサーベイとしては（List and Puppe, 2009）が挙げられる。よりフォーマルに Arrow の定理と判断集約理論での不可能性定理との対応を解説している論文としては，（Dietrich and List, 2007; List and Pettit, 2004）等が挙げられる。また，経済学における社会的選択理論での Arrow の定理については（Arrow, Sen, and Suzumura, 2002）およびそこに収録されている（Campbell and Kelly, 2002），さらに日本語で読めるものとしては（鈴村, 2012; 坂井, 2013），また一般書としては（佐伯, 1980）等が挙げられる。

2　パラドクス

2.1　Condorcet のパラドクス

以下は（List and Pettit, 2004）で紹介されているパラドクスである。

例 2.1（Condorcet のパラドクス）

a さん，b さん，c さんの 3 人が選択肢 x, y, z に対して，下の表ような選好をもっている。ここで，$x>y$ は選択肢 x が y よりも好ましいことを表している。また，各人は各選択肢のペア x と y について，必ず $x>y$ か $x<y$ かのどちらかをアクセプトするものとする。

	$x>y$	$y>z$	$x>z$
a さん	T	T	T
b さん	F	T	F
c さん	T	F	F
多数決	T	T	F

a さんは，表を横に読んで，$x>y$，$y>z$ および $x>z$ が T，すなわちこれらをアクセプトし，b さんは $x>y$ および $x>z$ が F，すなわちこれらをリジェクトし（言い換えれば，その逆 $x<y$ と $x<z$ をアクセプトし），$y>z$ をアクセプトしている。c さんについても同様である。このとき，今度は表を縦に読むと，$x>y$ については a さんと c さんがアクセプトで，b さんのみがリジェクトなため，多数決によって全体としては $x>y$ はアクセプトされる。同様に，$y>z$ も多数決で全体としてアクセプトされ，$x>z$ は多数決で全体としてリジェクトされる。しかしながら，$x>y$ および $y>z$ が成り立てば，選好 > の推移性から，論理的には $x>z$ が成り立たなければならない。したがってこの多数決の結果は，多数決と論理推論の間に矛盾が生じうることを表している。

また，a さんの $x>z$ に対する選好が F だった場合には，a さん自身の選好が論理的に矛盾する。

もちろん，多数決と論理推論は常に矛盾するわけではない。たとえば，a さんの $y>z$ に対する選好を T から F に代えた下の表のような状況だった場合，$y>z$ は多数決によって全体としてはリジェクトされ，全体としては $x>y$，$y<z$（$y>z$ の逆），$x<z$ がアクセプトされて $z>x>y$ という順序になり，多数決と論理推論の間に矛盾は生じない。

	$x>y$	$y>z$	$x>z$
a さん	T	F	T
b さん	F	T	F
c さん	T	F	F
多数決	T	F	F

2. 2 Discursive paradox

上記の Condorcet のパラドクスは社会的選択理論におけるパラドクスであり，そこでの論理推論は，より厳密には選好関係の推移性である。しかしながら，この Condorcet のパラドクスは選好関係の推移性のような特定の推論に限らずに，一般の命題と論理推論におけるパラドクスへと一般化される。（Dietrich and List, 2007）は，Condorcet のパラドクスを一般化した以下のような例を考察している。

例 2.2（Discursive paradox）以下の 3 つの命題 φ，ψ，$\varphi\to\psi$ に対する判断について考える。

φ：CO_2 の排出量は閾値を超えている。
ψ：地球温暖化が起こる。
$\varphi\to\psi$：CO_2 の排出量が閾値を超えているならば，地球温暖化が起こる。

	φ	$\varphi\to\psi$	ψ
a さん	T	T	T
b さん	F	T	F
c さん	T	F	F
多数決	T	T	F

先の例と同じく，T がアクセプト，F がリジェクトを表す。したがって，a さんは φ，$\varphi\to\psi$，ψ という 3 つの命題すべてをアクセプトし，b さんは $\varphi\to\psi$ のみ，c さんは φ

のみをそれぞれアクセプトしている。たとえば，b さんは φ が F，つまり CO_2 の排出量は閾値を超えていないと考えており，また c さんは φ が T，つまり CO_2 の排出量は閾値を超えていると考えているが，そうだとしても地球温暖化が起こるとは考えていない（ψ と $\varphi \to \psi$ が F)。

このとき，多数決では φ と $\varphi \to \psi$ がアクセプトされ，ψ がリジェクトされる（すなわち *not* ψ がアクセプトされる)。しかしながら，φ と $\varphi \to \psi$ がともに成り立つときには，論理的には ψ も成り立たなければならず，したがって，多数決で得られる 3 つの命題 φ, $\varphi \to \psi$, *not* ψ は全体として矛盾している。ここでも多数決と論理推論との間に矛盾が生じている。

上の表の各人の T/F のパターンは先の例 2.1 と同じであり，選好関係 > のみが一般の命題に拡張されている。すなわち，このパラドクスは Condorcet のパラドクスと同じ構造をしており，選好関係に限らない一般の命題への拡張となっている。

3　判断集約理論と Arrow の定理

Condorcet のパラドクスから発展した Arrow の定理は，経済学の社会的選択理論における定理であるが，近年では論理学の観点からより一般的な判断集約理論（Judgement aggregation theory）の枠組みで考察されている。（Arrow の定理については，（Arrow, 2012; Arrow, Sen, and Suzumura, 2002）参照。）以下 3.1 節では判断集約理論で必要となる最低限の論理体系について概説する。3.2 節と 3.3 節で判断集約理論について概説し，3.4 節で判断集約理論における不可能性定理を紹介する。

3.1　論理体系

本節では（Dietrich and List, 2007; List, 2012）に従って，判断対象となる命題（文）の記号表現である論理式を設定し，矛盾および論理的帰結の概念を導入する。

〔論理式〕ここでは，論理学でおなじみの命題論理の体系を考え，論理結合子（接続詞）の否定（not）¬，連言（and）∧，選言（or）∨，含意（imply）→から構成される通常の論理式を考えておく。一般の論理式を φ, ψ, σ, ... で表す。

先の例 2.2 に現れている φ や $\varphi \to \psi$ 等の記号表現が論理式であり，他にもたとえば $\varphi \to \neg\psi$（φ implies not ψ）や $\neg\varphi \land (\psi \to \sigma)$（not φ, and ψ implies σ）等が論理式である。

〔矛盾〕論理式のある集合について，そのそれぞれの論理式が同時に真でありうるとき，その論理式の集合は**無矛盾**（**consistent**）であるといい，同時に真にはなり得ないとき，その論理式の集合は**矛盾**（**inconsistent**）しているという。

たとえば，φ と ψ が真のとき，$\varphi \land \psi$（φ and ψ）は真だから，論理式の集合 $\{\varphi, \psi, \varphi \land \psi\}$ は無矛盾だが，$\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \land \psi)\}$ は矛盾している。

〔論理的帰結〕論理的帰結の具体的な定義はさまざまなものがあるが，特定の推論システムに依存しない形での（意味論的な）定義はたとえば以下のようなものである。論理式の集合 $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ に $\neg\varphi$ を加えた集合 $\{\sigma_1, ..., \sigma_n, \neg\varphi\}$ が矛盾するとき，φ は $\sigma_1, ..., \sigma_n$ の論理的帰結であり，$\sigma_1, ..., \sigma_n \models \varphi$ と表す。

これは $\sigma_1, ..., \sigma_n$ を前提として，φ が結論できることを意味している。

たとえば，$\varphi, \psi \models \varphi \land \psi$ である。なぜなら，

$\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \land \psi)\}$ は矛盾するからである。

後に，4.1 節で推論システムに基づく論理的帰結の（構文論的な）定義も導入する。

3. 2　判断集約理論（Judgement aggregation theory）

以上のような論理学でおなじみの設定に基づいて，判断集約理論における基本概念は以下のように定義される。

〔個人の集合〕n 人の個人 1, 2, 3, ..., n（これらの番号が個人の名前を表す）から成る集合を N で表す。つまり $N=\{1, 2, 3, ..., n\}$ である。ただし，$n\geq3$ とする。つまりここでは 3 人以上のグループでの判断集約について考える。

〔アジェンダ〕判断が下される論理式の集合をアジェンダ（**agenda**）と呼び，$\mathcal{A}$ で表す。アジェンダ $\mathcal{A}$ は，対立する論理式の集合であり，論理式 φ が $\mathcal{A}$ に含まれているときには，必ず $\neg\varphi$ も $\mathcal{A}$ に含まれているものとする。

たとえば，例 2.2 のアジェンダは $\mathcal{A}=\{\varphi, \neg\varphi, \psi, \neg\psi, \varphi\rightarrow\psi, \neg(\varphi\rightarrow\psi)\}$ である。

ここでは，$\neg\neg\varphi$ と φ は同一の論理式とみなす。また，$\mathcal{A}$ には $\varphi\rightarrow\varphi$ のような恒真式（トートロジー），および $\varphi\land\neg\varphi$ のような恒偽式(矛盾式)は含まれないものとする。(恒真式や恒偽式には判断の余地はないものと考える。)

また，判断対象となる論理式は 3 つ以上あるものとする。すなわち $|\mathcal{A}|\geq3$ である。(互いに無関係な 2 つの論理式のみからなる自明な（おもしろくない）アジェンダに対しては，論理推論は関係ないため，多数決と論理推論は当然矛盾しない。)

〔個人の判断集合〕N のメンバーである個人 i が，アジェンダ $\mathcal{A}$ に含まれる論理式について，アクセプトする（それが真だと認める）論理式の集合を i の判断集合と呼び，J_i で表す。$\varphi\in J_i$ のとき，個人 i は φ をアクセプトする。

ここでは，J_i は無矛盾であるとする。つまり，各個人の判断は矛盾していないものとする。さらに，J_i は完全であるとする。すなわち，アジェンダ $\mathcal{A}$ に含まれる対立する論理式のペア φ と $\neg\varphi$ について，必ずどちらか一方は J_i に含まれるものとする。したがって，各個人はアジェンダに含まれる対立する論理式のうち，必ずどちらか一方をアクセプトする。

たとえば，例 2.2 では，a さんを 1，b さんを 2，c さんを 3 として，$J_1=\{\varphi, \psi, \varphi\rightarrow\psi\}$，$J_2=\{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi\rightarrow\psi\}$，$J_3=\{\varphi, \neg\psi, \neg(\varphi\rightarrow\psi)\}$ である。

〔プロファイル〕N の各メンバーの判断集合の列（$J_1, J_2, ..., J_n$）をプロファイルと呼ぶ。

個人の判断は，状況によって変わることもありうるとする。たとえば例 2.2 では，a さんは $J_1=\{\varphi, \psi, \varphi\rightarrow\psi\}$ となっているが，別の状況下では同じ論理式に対して，a さんの判断が $J_1^*=\{\neg\varphi, \neg\psi, \varphi\rightarrow\psi\}$ ということもありうるとする。理論的には，a さんの判断に限っても，各論理式に対する判断が T か F の 2 通りで，2 × 2 × 2=8 通りの判断集合がありうる。(3 人全体では，8 × 3=24 通りの表（プロファイル）がありうることになる。) ただし，その中には論理的に矛盾する判断も含まれる。たとえば，a さんの判断集合を $\{\varphi, \neg\psi, \varphi\rightarrow\psi\}$ とすると，φ と $\varphi\rightarrow\psi$ が真なら，論理的には ψ も真だから，この判断集合は矛盾している（だから本来この集合は判断集合ではない）。矛盾した判断（$\neg\varphi, \neg\psi, \neg(\varphi\rightarrow\psi)$; $\neg\varphi, \psi, \neg(\varphi\rightarrow\psi)$; $\varphi, \psi, \neg(\varphi\rightarrow\psi)$；$\varphi, \neg\psi, \varphi\rightarrow\psi$）を除くと，a さんの判断集合としては全部で 4 通りあり，これらをそれぞれ J_1, J_1^*, J_1^{**} 等と表す。

プロファイル（$J_1, ..., J_n$）をベクトル表記を用いて $\vec{J}$ や $\vec{J}^*$ 等で表す。

〔集約規則〕個々人の判断集合から成るプロファイルに対して，グループ全体としての**集約的判断**を定める規則を**集約規則**と呼ぶ。数学的には，集約規則 F はプロファイル $\vec{J}$ から判断集合 $F(\vec{J})$ への関数である。

3．3　集約規則の諸条件

集約規則にはたとえば，多数決や独裁制等さまざまなものがありうる。個人の意見とは無関係に，最初から結果が決まっているような集約規則も考えることはできるが，そのような規則は「まっとう」とは言えない。どんな集約規則でも良いわけではない。そこでまず，一般に挙げられる「まっとうな」集約規則が満たすべき（とされる）諸条件のうちのいくつかを紹介する。

〔**Collective rationality**〕グループ全体としての集約的判断は，矛盾することはなく，また完全でなければならない。数学的には，任意のプロファイル $\vec{J}$ について（つまりどんな場合にも），集約規則 F に基づく集約的判断 $F(\vec{J})$ が無矛盾で完全であるということである。

先に見たように多数決は，集約結果が論理推論と矛盾する場合があるため，Collective rationality の条件を満たさない。

〔**Unanimity**〕全メンバーが φ をアクセプトするときには，集約的にも φ はアクセプトされなければならない。

フォーマルには以下のように表される。すべての $i \in N$ について $\varphi \in J_i$ のときには，$\varphi \in F(\vec{J})$ でなければならない。

〔**Independence**〕φ のアクセプト・リジェクトの判断がプロファイル J_i と別のプロファイル $J_i{}^*$ で一致している，このことがすべてのメンバーについて言えるときには，集約的にも φ に対する判断は $F(\vec{J})$ と $F(\vec{J}^*)$ で一致しなければならない。

つまり，もとの J_i から状況が変わって他の論理式に対する判断が $J_i{}^*$ に変わっても φ に対する判断は変わらない，これがすべてのメンバーについて言えるときには，集約的にも φ に対する判断は $F(\vec{J})$ と $F(\vec{J}^*)$ で変わってはならない，ということを意味する。より簡潔に言えば，全メンバーにとって，φ に対する判断が他の論理式に対する判断から独立なときには，集約的にも φ に対する判断は他の論理式から独立でなければならないということである。

この条件はフォーマルには以下のように表される。すべての $i \in N$ について，$\varphi \in J_i$ if and only if $\varphi \in J_i{}^*$ が成り立つときには，$\varphi \in F(\vec{J})$ if and only if $\varphi \in F(\vec{J}^*)$ が成り立たなければならない。

〔**Systematicity**〕J_i における φ に対する判断と，$J_i{}^*$ における ψ の判断が一致している（つまり φ と ψ に対するアクセプト・リジェクトのパターンが一致している）ことが全メンバーについて言えるときには，集約的にも $F(\vec{J})$ での φ の判断と $F(\vec{J}^*)$ での ψ の判断は一致しなければならない。

この条件は，上記の Independence を一般化したものであり，Systematicity の ψ が φ と同一の論理式のときが Independence の条件となる。

よりフォーマルには以下のように表される。すべての $i \in N$ について，$\varphi \in J_i$ if and only if $\psi \in J_i{}^*$ が成り立つときには，$\varphi \in F(\vec{J})$ if and only if $\psi \in F(\vec{J}^*)$ が成り立たなければならない。

上記のような集約規則の条件に加えて，通常はアジェンダにもさらに条件が課される。バラバラで論理推論が関わらないようなアジェンダでは，多数決と論理推論は矛盾しない（(Grossi and Pigozzi, 2014）の Theorem 3.2 を参照）。Condorcet のパラドクスは選好関係の推移性等の一定の論理構造をもったアジェンダについて生じるのである。(List and Polak, 2010）では，Arrow の定理の証明の概説を通して，選好関係およびその推移性等に対応する判断集約理論での諸条件が考察されている。しかしながら，これらの諸条件は非常にテクニカルな条件として定式化されており（6.1 節参照），本稿ではこれらの条件を避けるために，以下で述べる Monotonicity および Intersection closedness の条件を集約規則に課す。その上で，アジェンダ $\mathcal{A}$ には特殊な条件は一切課さずに，単に 3.2 節で述べた条件のみとする。（3.2 節ではアジェンダに特別な構造を要求していないが，以下の Intersection closedness の条件によって，アジェンダが一定の論理構造をもつことが要求される。）

3. 4　不可能性定理と Arrow の定理

本節では，Monotonicity と Intersection closedness の条件を導入し，判断集約理論における不可能性定理を紹介する。

定義 3.1 プロファイル $\vec{J}$ のもとで φ をアクセプトするグループ（**coalition supporting** φ）を $\vec{J}(\varphi)$ と表す。

$$\vec{J}(\varphi) = \{i \in N \mid \varphi \in J_i\}$$

すなわち，自身の判断集合に φ を含む（φ をアクセプトする）N のメンバー全員からなる集合である。

定義 3.2 集約規則 F のもとで $\varphi \in F(\vec{J})$ が成り立つ，すなわち φ が集約的にアクセプトされるとき，その φ をアクセプトするグループ $\vec{J}(\varphi)$ を，φ について決定的なグループ（**winning coalition supporting** φ）と呼ぶ。

すなわち，φ について，集約結果において意見が通っているグループが決定的なグループである。集約規則 F のもとで決定的なグループすべての集合を $\mathcal{W}$ で表す。

$$\mathcal{W} = \{\vec{J}(\varphi) \subseteq N \mid \varphi \in F(\vec{J})\}$$

定義 3.3（**Monotonicity**）プロファイル $\vec{J}$ のもとで φ が集約的にアクセプトされていて，そのとき φ をアクセプトするメンバーは全員，別のプロファイル $\vec{J}^*$ でもやはり φ をアクセプトするとする。このとき，φ は $\vec{J}^*$ でもやはり集約的にアクセプトされなければならない。

フォーマルには以下のように表される。任意のプロファイル $\vec{J}$, $\vec{J}^*$ と，任意の論理式 $\varphi \in \mathcal{A}$ について

$$\varphi \in F(\vec{J}) \text{ かつ } \vec{J}(\varphi) \subseteq \vec{J}^*(\varphi) \text{ ならば，} \varphi \in F(\vec{J}^*)$$

定義 3.4（**Intersection closedness**）プロファイル $\vec{J}$ のもとで φ について決定的なグループ $\vec{J}(\varphi)$ と，別のプロファイル $\vec{J}^*$ のもとで ψ について決定的なグループ $\vec{J}^*(\psi)$ に共通のメンバーについて考えると，その人たちはある論理式 σ について決定的なグループとなっていなければならない。

よりフォーマルには以下のように表される。任意のプロファイル $\vec{J}$, $\vec{J}^*$ と，任意の論理式 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ について，$\varphi \in F(\vec{J})$ かつ $\psi \in F(\vec{J}^*)$ のときには，$\vec{J}(\varphi) \cap \vec{J}^*(\psi) = \vec{I}(\sigma)$ かつ $\sigma \in F(\vec{I})$ となるようなプロファイル $\vec{I}$ と論理式 $\sigma \in \mathcal{A}$ が存在しなければならない。

この条件は，$\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ でそれぞれ集約的にアクセプトされるときには，アジェンダ $\mathcal{A}$ が $\varphi \wedge \psi$ もしくはそれに相当する論理式を含んでいることを要求する。すなわちこの条件が，$\mathcal{A}$ が単なるバラバラの論理式から成るのではなく，ある程度の論理構造をもつことを要請している。

一般には，これらの Monotonicity および Intersection closedness は，集約規則 F の条件として課されることはなく，他のより基本

的な条件から導かれる F の性質である。

これらの条件から，以下の不可能性定理が得られる。

定理 3.5（不可能性定理） F を Collective rationality，Systematicity，Monotonicity，Intersection closedness を満たす集約規則とするとき，F は独裁的である。

ここで，集約規則 F が独裁的であるのは，あるメンバー $i \in N$ が存在して，どんなプロファイル $\vec{J}$ についても，$F(\vec{J}) = J_i$ となるときである。すなわち，どんな場合にも集約結果がすべて自身の判断と一致しているような個人 i が独裁者である。

上の定理は，決定的なグループすべての集合 $\mathcal{W}$ が，代数学的な ultrafilter を成すことから示される。（証明の概略は 6.2 節参照。）代数学の定理によって，N 上の ultrafilter $\mathcal{W}$ は principal，すなわち以下を満たす個人 $i \in N$ が存在することが知られている。

$$\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W} \text{ if and only if } i \in \vec{J}(\varphi)$$

この i が独裁者である。なぜなら，（6.2 節の補題 6.6 から）$\varphi \in F(\vec{J})$ は $\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W}$ と同値であり，上の ultrafilter の性質から $\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W}$ と $i \in \vec{J}(\varphi)$ が同値である。さらに定義から $i \in \vec{J}(\varphi)$ は $\varphi \in J_i$ と同値である。よって，$\varphi \in F(\vec{J})$ と $\varphi \in J_i$ が同値，すなわち $F(\vec{J}) = J_i$ だからである。

不可能性定理は，命題論理に限らず 1 階述語論理でも同じように成り立つ。1 階述語論理は数学を記述するための論理であり，四則演算や等号 =，大小関係 < などの数学の定理を記述するのに必要な記号およびそれらが満たすべき性質が公理として適宜導入される。Arrow の定理は，選好関係 < について成り立つ定理であり，選好関係 < は大小関係として自然に 1 階述語論理に導入することができる。選好関係の論理は，大小関係 <（と等号 =）のみを扱う 1 階述語論理の部分体系である。よって，判断集約理論における不可能性定理の系（特殊形）として Arrow の定理が得られる。（6.1 節参照。より詳しくは（Dietrich and List, 2007）を参照。）

4　多数決と論理

Arrow の定理の考察の基となった Condorcet のパラドクスでは，多数決と論理推論が矛盾しうることが示されていた。しかしながらこの矛盾の概念は，古典論理と呼ばれる，数学で通常用いられる論理における矛盾の概念である。論理学では，古典論理に限らないさまざまな論理体系が研究されており，必ずしも古典論理が唯一の正統な論理体系というわけではない。論理推論が適用される文脈によっては，数学においてさえも古典論理が必ずしも適切ではなかったり，論理構造の分析には古典論理では不充分な場合もある。矛盾の概念もそれらの体系に応じてさまざまなものがありうる。たとえば（Porello, 2017）では，線形論理と呼ばれる古典論理を分析するためのシステムを用いて，必ずしも多数決と論理推論が矛盾しないことが示されている。

以下 4.1 節では，最小論理と呼ばれる論理体系に対して index（指標）を付けた推論システムを導入する。最小論理は古典論理の部分体系であり，背理法等いくつかの哲学的に議論の的となる推論を制限することで得られる論理体系である。ここでは，連言∧と含意→，否定¬のみを考える（選言∨は扱わない）。さらにこの推論システムに対して，多数決を推論規則として導入する。4.2 節では，必ずしも Condorcet のパラドクスのように多数決と論理推論は矛盾するわけではないことを示す。

4.1　多数決付推論システム

3.1 節では，特定の推論システムに依存しない形での論理的帰結の概念を導入したが，本節では具体的な推論システムを導入し，それに基づく論理的帰結の概念を導入する。ここでは，論理学における代表的な推論システムである Gentzen の式計算（Gentzen, 1934）を用いる。式計算では論理式ではなく，式（sequent）と呼ばれる論理的帰結を表す論理式の列が基本要素となり，証明の出発点となる公理と，推論を進めるための推論規則から構成される。より厳密な定義と解説はたとえば，（Buss, 1998; 小野, 1994）を見て欲しい。

アジェンダ $\mathcal{A}$ とプロファイル $\vec{J}$ を１つ固定し，それに対して推論システムを定義する。

〔式〕以下の形の論理式の列を式（**sequent**）と呼ぶ。

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash_\alpha \sigma$$

ここで，$\alpha \subseteq N$ である。

この式は，$\vdash_\alpha$ の左側にある論理式が前提，右側にある論理式が結論を表しており，結論 σ が前提 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ の論理的帰結であることを，グループ α のメンバーがアクセプトしていることを意味する。なお，前提に現れる論理式の順序は固定されていないものとする。

$\vdash_\alpha$ の右辺に論理式が１つもない式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash_\alpha$ は，前提 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ から矛盾が導けることを α のメンバーがアクセプトしていることを意味する。とくに，両辺に論理式が一つもない式 $\vdash_\alpha$ はグループ α のメンバーが全員矛盾すること，$\vdash_N$ は N 全体が前提なしに矛盾をアクセプトすること，すなわち N 全体が矛盾すること，$\vdash_\emptyset$ は誰も矛盾をアクセプトしないことを表す。グループ N 全体が矛盾する状況はあってはならない状況だが，全体 N とは異なるグループ α のメンバーが矛盾することはありうる。

〔論理公理〕論理公理は以下の形である。

$$\varphi \vdash_N \varphi$$

すなわち，結論 φ が前提 φ の論理的帰結であることを，グループ全体 N がアクセプトするという自明な事実である。

〔非論理公理〕非論理公理は以下の形である。

- $\alpha = \{i \in N \mid \neg\varphi \in J_i\}$（つまり否定形の論理式 $\neg\varphi$）に対して，

$$\varphi \vdash_\alpha$$

- $\alpha = \{i \in N \mid \varphi \in J_i$ で φ は否定形でない$\}$ に対して，

$$\vdash_\alpha \varphi$$

すなわち，グループ α の人々が φ をアクセプトすることを $\vdash_\alpha \varphi$ と表し，$\neg\varphi$ をアクセプトすることを $\varphi \vdash_\alpha$ と表し，これらを公理とする。

式計算における推論規則は以下の形で表される。

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\beta \varphi_1}{\delta_1, \ldots, \delta_l \vdash_\alpha \varphi}\ rule$$

または

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\beta \varphi_1 \quad \sigma'_1, \ldots, \sigma'_j \vdash_\gamma \varphi_2}{\delta_1, \ldots, \delta_l \vdash_\alpha \varphi}\ rule$$

上の表現は，上式 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\beta \varphi_1$ および $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_j \vdash_\gamma \varphi_2$ から，下式 $\delta_1, \ldots, \delta_l \vdash_\alpha \varphi$ が推論規則 *rule* によって導けることを意味する。

式計算における推論規則は，２つのグルー

プから成る。1つは論理結合子に直接関わる推論規則であり，ここではこれらを**論理規則群**と呼ぶ。またもう1つは，論理結合子に直接的には関わらない規則であり，ここでは**構造規則群**と呼ぶ。

論理規則群は以下の∧規則，→規則，¬規則から成る。

〔∧ 規則（∧ $L1$，∧ $L2$ と∧ R)〕

$$\frac{\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma}{\varphi \wedge \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma} \wedge L1$$

$$\frac{\psi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma}{\varphi \wedge \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma} \wedge L2$$

上の規則では，$\sigma_1, ..., \sigma_k$はコンテクストと呼ばれ，上式と下式で変わらず，直接的にはこの推論規則には関わらない。簡単のためにコンテクストの$\sigma_1, ..., \sigma_k$を無視して考えると，∧ $L1$ 規則は前提 φ から σ が結論できることを α のメンバーがアクセプトするときには，より強い前提 $\varphi \wedge \psi$（$\varphi \wedge \psi$から φ は導ける）からも σ が結論できることを α のメンバーがアクセプトすることを意味している。∧ $L2$ 規則も同様である。

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi \quad \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\beta \psi}{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_{\alpha \cap \beta} \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

∧ R 規則は，α のメンバーが φ をアクセプトし，β のメンバーがψをアクセプトするときには，α と β に共通のメンバーは $\varphi \wedge \psi$をアクセプトすることを意味している。

〔→規則（→ L と→ R)〕

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi \quad \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\beta \sigma}{\varphi \to \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_{\alpha \cap \beta} \sigma} \to L$$

$$\frac{\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \psi}{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi \to \psi} \to R$$

→ L 規則は，α のメンバーが φ をアクセプトし，β のメンバーがψから σ が帰結することをアクセプトするときには，α と β に共通のメンバーは $\varphi \to \psi$から σ が帰結することをアクセプトすることを意味している。また，→ R 規則は，α のメンバーが φ から ψが帰結することをアクセプトするときには，α のメンバーは $\varphi \to \psi$をアクセプトすることを意味している。

〔¬ 規則（¬L と ¬R)〕

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi}{\neg\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha} \neg L$$

$$\frac{\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha}{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \neg\varphi} \neg R$$

¬L 規則は，φ が結論できることを α のメンバーがアクセプトするときには，前提に ¬φ を加えると矛盾することを α のメンバーがアクセプトすることを意味する。また，¬R 規則は，φ という前提から矛盾が結論できることを α のメンバーがアクセプトするときには，φ でないこと，すなわち ¬φ が結論できることを α のメンバーがアクセプトすることを意味する。

構造規則群は，以下の *cut* 規則，*weak* 規則，*contr* 規則，*mer* 規則，*mv* 規則から成る。

〔*cut* 規則〕

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi \quad \varphi, \delta_1, \dots, \delta_l \vdash_\beta \sigma}{\sigma_1, \dots, \sigma_k, \delta_1, \dots, \delta_l \vdash_{\alpha \cap \beta} \sigma} \ cut$$

cut 規則は，α のメンバーが φ が結論できることをアクセプトし，さらに β のメンバーがψから σ が結論できることをアクセプトするときには，α と β に共通のメンバーは σ が帰結することをアクセプトすることを意味する。

〔*weak*（**weakening**） と *contr*（**contraction**）規則〕

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma}{\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma} \ weak$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma}{\varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma} \ contr$$

weak 規則は，前提が増えてもアクセプトする結論は変わらないことを意味する。また，*contr* 規則は，同じ前提をまとめて1つと考えてよいことを表している。

〔*mer* 規則（**Merge**）〕

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi \quad \delta_1, \ldots, \delta_l \vdash_\beta \varphi}{\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l \vdash_{\alpha\cup\beta} \varphi}\ mer$$

mer 規則は，α のメンバーが $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ から φ が帰結することをアクセプトし，β のメンバーは別の前提 $\delta_1, \ldots, \delta_l$ から同じく φ が帰結することをアクセプトするときには，α もしくは β のどちらかに所属するメンバーは，$\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_l$ から φ が帰結することをアクセプトすることを意味している。

〔*mv* 規則（**Majority voting** 多数決）〕

$|\alpha| > \frac{|N|}{2}$，つまりグループ α の人数が過半数のとき，

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\alpha \sigma}{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_N \sigma}\ mv$$

過半数を超えるグループ α のメンバーがアクセプトする論理的帰結は，多数決を通して，全体 N がアクセプトすることを意味している。

式計算における証明図は，これらの推論規則を積み重ねてできる下の例 4.1 のような木構造である。ただし，証明図の一番上（証明の出発点）には，公理（論理公理または非論理公理のいずれか）が来なければならない。また，たとえば $\alpha = \{1, 2, 3\}$ のとき，$\varphi \vdash_\alpha \psi$ を（{} と , を省略して）$\varphi \vdash_{123} \psi$ と表す。

例 4.1（証明図）$N = \{1, 2, 3\}$ で $\neg\psi \in J_2$, $\neg\varphi \in J_3$ のとき，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash_3}{\varphi\wedge\psi \vdash_3}\wedge L1}{\vdash_3 \neg(\varphi\wedge\psi)}\neg R \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash_2}{\varphi\wedge\psi \vdash_2}\wedge L2}{\vdash_2 \neg(\varphi\wedge\psi)}\neg R}{\dfrac{\vdash_{23} \neg(\varphi\wedge\psi)}{\vdash_N \neg(\varphi\wedge\psi)}\ mv}\ mer$$

上の証明図を，一番下に来る式 $\vdash_N \neg(\varphi \wedge \psi)$ の証明図と呼ぶ。

以下では，見やすさのために，$\wedge L1$ や $\neg R$ のような証明図中の論理規則の名前は省略する。ただし，構造規則には本稿独自のものが多いため，構造規則の名前は明示することにする。

定義 4.2（証明可能性（論理的帰結））

式 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi$ の証明図が存在するとき，式 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi$ は**証明可能**（provable）であるという。

とくに，$\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_N \varphi$ が証明可能なとき，これは N のメンバー全員がアクセプトする論理的帰結である。

4.2　パラドクスの分析

以下では，例 2.2 において多数決と論理推論が矛盾する過程について分析する。ここでは，議論を見やすくするために，→ではなく，以下のような∧に関するパラドクスを考える。例 2.2 と比べて，$\varphi \rightarrow \psi$ を ψ に，ψ を $\varphi \wedge \psi$ に変更しただけであり，表の T/F の配置は変わらず，例 2.2 と本質的にまったく同一のパラドクスである。$N = \{1, 2, 3\}$ とする。また $\mathcal{A} = \{\varphi, \neg\varphi, \psi, \neg\psi, \varphi\wedge\psi, \neg(\varphi\wedge\psi)\}$ として，$J_1 = \{\varphi, \psi, \varphi\wedge\psi\}$, $J_2 = \{\neg\varphi, \psi, \neg(\varphi\wedge\psi)\}$, $J_3 = \{\varphi, \neg\psi, \neg(\varphi\wedge\psi)\}$ とする。

	φ	ψ	$\varphi\wedge\psi$
1	T	T	T
2	F	T	F
3	T	F	F
多数決	T	T	F

4.2.1　多数決と論理推論の組み合わせ

上記のパラドクスで矛盾が生じる過程は，証明図によって以下のように表すことができる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_{13}\varphi}{\vdash_N \varphi}\,mv \quad \dfrac{\vdash_{12}\psi}{\vdash_N\psi}\,mv}{\vdash_N \varphi\wedge\psi} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash_2}{\varphi\wedge\psi\vdash_2}\quad\dfrac{\psi\vdash_3}{\varphi\wedge\psi\vdash_3}}{\varphi\wedge\psi\vdash_{23}}\,mer}{\varphi\wedge\psi\vdash_N}\,mv}{}}{\vdash_N}\,cut$$

1と3が φ をアクセプトし（左上 $\vdash_{13}\ \varphi$），1と2が ψ をアクセプトする（$\vdash_{12}\ \psi$）。したがって，多数決 *mv* 規則により φ および ψ がそれぞれ全体 N でアクセプトされ，よって $\varphi \wedge \psi$ が全体でアクセプトされる。また，右上の証明図では，2が $\neg\varphi$ をアクセプトし（$\varphi\vdash_2$），したがって2は $\neg(\varphi \wedge \psi)$ をアクセプトする（$\varphi \wedge \psi\vdash_2$）。同様に，3も $\neg(\varphi \wedge \psi)$ をアクセプトするため，*mer* 規則および *mv* 規則から，$\neg(\varphi \wedge \psi)$ が全体でアクセプトされる。最後に，左側の証明図と右側の証明図を *cut* 規則で結合すると，$\vdash_N$ が証明可能となる。先にも述べたように，$\vdash_N$ は N 全体が矛盾をアクセプトする，すなわち N 全体が矛盾していることを表している。

注 4.3（多数決無し）多数決を用いなければ，矛盾は生じない。多数決 *mv* 規則なしで上と同様の証明図を構成すると，$\vdash_\emptyset$ が証明可能なことが示せるが，$\vdash_\emptyset$ は誰も矛盾をアクセプトしないということを意味し，矛盾ではない。

$$\dfrac{\dfrac{\vdash_{13}\varphi \quad \vdash_{12}\psi}{\vdash_1 \varphi\wedge\psi} \quad \dfrac{\dfrac{\varphi\vdash_2}{\varphi\wedge\psi\vdash_2}\quad\dfrac{\psi\vdash_3}{\varphi\wedge\psi\vdash_3}}{\varphi\wedge\psi\vdash_{23}}\,mer}{\vdash_\emptyset}\,cut$$

多数決と論理推論の間の矛盾を避ける方法としてさまざまな方法が考案されているが，その代表的なものが「前提多数決方式（premise-based approach）」と「結論多数決方式（conclusion-based approach）」である。前提多数決方式の考え方は，最初に前提に対して多数決を採って，その論理推論の結果を受け入れるというものであり，結論多数決方式の考え方は，最初に論理推論を行い，推論結果を受け入れるかどうか多数決で判断するというものである。したがってわれわれの推論システムでは，前提多数決方式は証明の最初のステップにのみ多数決 *mv* 規則の適用が許され，結論多数決方式では証明の最後のステップにのみ *mv* 規則の適用が許される証明図として表現できる。

ただし，前提多数決方式および結論多数決方式は，集約規則の条件 Independence に（したがって Systematicity にも）反する。（Dietrich and Mongin, 2010; Grossi and Pigozzi, 2014）を参照。

4. 2. 2　前提多数決方式

前提多数決方式では，証明の最初のステップでのみ多数決規則 *mv* の適用が許される。したがって，前節 4.2.1 の証明図では右側の *mv* 規則の適用は許されず，以下のような証明図が得られる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_{13}\varphi}{\vdash_N \varphi}\,mv \quad \dfrac{\vdash_{12}\psi}{\vdash_N\psi}\,mv}{\vdash_N \varphi\wedge\psi} \quad \dfrac{\dfrac{\varphi\vdash_2}{\varphi\wedge\psi\vdash_2}\quad\dfrac{\psi\vdash_3}{\varphi\wedge\psi\vdash_3}}{\varphi\wedge\psi\vdash_{23}}\,mer}{\vdash_{23}}\,cut$$

$\vdash_{23}$ は，2および3のメンバーのみが矛盾することを表している。ここでは，2，3のメンバーの結論 $\neg(\varphi \wedge \psi)$ が，N 全体の結論 $\varphi \wedge \psi$ と矛盾することを表しているが，N 全体の矛盾ではない。

（Nehring, 2005）は，前提多数決方式の困難として，以下のような例を挙げている。

例 4.4（前提多数決方式の困難）
$N=\{1, 2, 3\}$ で，$J_1=\{\varphi, \psi, \neg\sigma, \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma)\}$，$J_2=\{\neg\varphi, \psi, \sigma, \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma)\}$，$J_3=\{\varphi, \psi, \neg\sigma, \neg((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma)\}$ とする。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_{13}\varphi}{\vdash_N \varphi}\,mv \quad \dfrac{\vdash_{12}\psi}{\vdash_N \psi}\,mv}{\vdash_N \varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\vdash_{23}\sigma}{\vdash_N \sigma}\,mv}{\vdash_N (\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash_2}{\varphi\wedge\psi\vdash_2}}{(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\vdash_2} \quad \dfrac{\dfrac{\psi\vdash_3}{\varphi\wedge\psi\vdash_3}}{(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\vdash_3}}{(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\vdash_{23}}\,mer \qquad \dfrac{\sigma\vdash_1}{(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\vdash_1}}{(\varphi\wedge\psi)\wedge\sigma\vdash_{123}}\,mer$$

ここで，$N=\{1, 2, 3\}$ であるため，下側の証明図で最後に得られる（$\varphi\wedge\psi$）$\wedge\sigma\vdash_{123}$ は（$\varphi\wedge\psi$）$\wedge\sigma\vdash_N$ と同一である。そうすると，最後に *cut* 規則を適用することで，$\vdash_N$ が証明可能，すなわち N 全体が矛盾していることが示される。

テクニカルには，たとえば議長に対応するものを導入することでこの困難は避けることができる。全体 N を $N^+=\{1, 2, 3, \dagger\}$ と拡張して，† は議長を表すことにする。議長は，判断集合を構成せず，非論理公理には関わらないが，多数決においてのみ意思決定に関わり，多数決の結果に必ず加わる。そうすると，$N^+\neq\{1, 2, 3\}$ となり，下側の証明図で最後に得られる結論は，議長を含む全メンバー N^+ にとってアクセプトされる結論とは異なるものとなり，議長の分だけ $\vdash_{N+}$（$\varphi\wedge\psi$）$\wedge\sigma$ が全体としてアクセプトされることになる。ただし，このような解決策が妥当かどうかには議論の余地がある。

4. 2. 3　結論多数決方式

結論多数決方式では，証明の最後のステップでのみ多数決規則の適用が許される。したがって，4.2.1 節の証明図では左側の 2 つの *mv* 規則の適用が許されず，以下のような 2 つの証明図が得られる。

$$\dfrac{\vdash_{13}\varphi \quad \vdash_{12}\psi}{\vdash_1 \varphi\wedge\psi} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash_2}{\varphi\wedge\psi\vdash_2} \quad \dfrac{\psi\vdash_3}{\varphi\wedge\psi\vdash_3}}{\varphi\wedge\psi\vdash_{23}}\,mer}{\varphi\wedge\psi\vdash_N}\,mv$$

結論多数決方式としては，テクニカルには 2 通りのシステムが考えられる。1 つは，文字通り証明図の最後のステップに多数決規則の適用を許すシステムであり，もう 1 つは，多数決規則の下にも構造規則群の適用は許す（論理規則群の適用は許さない）システムである。先にも述べた通り，構造規則群の推論規則は論理結合子に直接的には関わらない規則である。文字通り最後のステップにのみ多数決規則を許すシステムでは，上記のような別々の 2 つの証明図が得られ，全体としてアクセプトされるのは $\varphi\wedge\psi\vdash_N$ すなわち，$\neg$（$\varphi\wedge\psi$）である。また，多数決規則の下に構造規則群の適用は許すシステムでは，最後に *cut* 規則を適用することで，$\vdash_1$ が得られるが，これは 1 の判断が全体 N と矛盾することを意味しているだけであり，N 全体の矛盾ではない。結果的に得られる N 全体の結論は，もう一方のシステムと同じく $\neg$（$\varphi\wedge\psi$）である。また，結論多数決方式に対しては，Nehring の指摘も当たらない。

5　まとめと今後の課題

本稿では，多数決と論理推論が矛盾するという Condorcet のパラドクスとその一般化である discursive paradox を紹介した。続いて，それらのパラドクスの研究から発展した不可能性定理および Arrow の定理について，判断集約理論の枠組みで概説した。とくに，本稿では通常アジェンダに対して課されるテクニカルな諸条件を避けるために，集約規則の条件として Monotonicity と Intersection closedness の条件を導入した。本稿ではさらに，証明論の観点からパラドクスを分析するために，最小論理における多数決付きの推論システムを導入した。証明論の利点は，意味論的な方法と異なり，推論過程を明確にたどることができる点にある。これにより，どこでどう矛盾が生じているか，何と何が矛盾し

ているかの分析が可能となる。またそれにより，推論規則の適用制限や証明の構成方針等を考察することで，パラドクスの回避策を検討することが可能となる。本稿では，多数決付推論システムを用いて，前提多数決方式および結論多数決方式のもとではパラドクスが回避できることを示した。

今後はまず，本システムの分析を深め，通常の推論システムの持つ性質を調べる必要がある。とくに，システム自体の無矛盾性を証明する必要があり（以下 5.1 節），さらにこのシステムに対応する意味論を設定する必要がある（5.2 節）。

5.1　無矛盾性

4.2 節の分析により，discursive paradox は前提多数決方式および結論多数決方式に基づく多数決付の論理では矛盾は生じず，パラドクスは回避できることを示した。しかしながら，既存のパラドクス以外のその他の矛盾も一切生じないことを示すためには，推論システムの無矛盾性を証明しなければならない。無矛盾性証明は証明論における非常にテクニカルな議論が必要となるため，ここでは議論しないが，証明論の基本定理であるカット消去定理（もしくは証明の正規化定理）により示される。この定理は，どんな証明もそれと同じ結論をもつ正規形の証明（*cut* 規則を用いない証明）に書き換えられることを述べており，正規形証明はそのシステムにおける証明の構造を特徴づけ，証明論的分析の出発点となる概念である。

多数決 *mv* 規則が証明の最後にのみ適用されるシステムにおける証明図は，本質的には *mv* 規則を用いないシステムの証明図と同等であり，通常の推論システムに対するカット消去定理を応用することで以下の形の定理が証明できる。

カット消去定理：$\sigma_1, ..., \sigma_k \vdash_N \varphi$ が証明可能であれば，$\sigma_1, ..., \sigma_k \vdash_N \varphi$ は *cut* 規則を用いずに証明可能である。

この定理から，以下のようにして推論システムの無矛盾性が証明できる。任意の $\alpha \subseteq N$ について，$\vdash_\alpha$ が多数決 *mv* を用いずに証明可能であるとする。すると，$\vdash_\alpha$ の上の規則は *cut* か *mer* のいずれかしかない。なぜなら，論理規則および *weak*，*contr* は，その上式と下式に必ず論理式が1つ以上現れていなければならないからである。*mer* の場合を考えてみると，以下の形である。

$$\frac{\vdash_\beta \quad \vdash_\gamma}{\vdash_{\beta\cup\gamma}}\,mer$$

ただし，$\beta \cup \gamma=\alpha$ である。したがって，問題は元と同じ形の$\vdash_\beta$ もしくは$\vdash_\gamma$ の証明可能性に還元される。よって，*cut* 規則の場合のみが本質的であり，以下の形である。

$$\frac{\vdash_\beta \varphi \quad \varphi \vdash_\gamma}{\vdash_{\beta\cap\gamma}}\,cut$$

ただし，$\beta \cap \gamma=\alpha$ である。すべての証明図は公理から始まり，公理には必ず論理式が含まれている。したがって，論理式が1つもない式$\vdash_\alpha$ が証明可能であるとすると，下から証明図をたどった時に論理式が現れるのは *cut* 規則を用いたときのみだから，その証明図には必ず *cut* 規則が適用されていなければならない。しかしながら，カット消去定理から，もしも$\vdash_\alpha$ が証明可能なら，$\vdash_\alpha$ は *cut* 規則を用いずに証明可能でなければならない。これは矛盾である。したがって，$\vdash_\alpha$ は証明可能でない。とくに，$\vdash_N$（N 全体の矛盾）も証明可能ではなく，したがって，結論多数決方式に基づく多数決付推論システムは無矛盾である。

議長付きの前提多数決方式のシステムでは，*mv* 規則に対する通常の *cut* 消去手続きがそのままでは適用できないが，前提多数決

方式の性質を用いて，mv 規則の適用を分析することで，定理が証明できるものと考えられる。このシステムのカット消去定理および無矛盾性については，稿を改めて議論する。

5.2　意味論

多数決 mv 規則を除けば，以下のように自然な形で本システムの集合論的意味論が与えられる。

• 原子論理式 P の解釈 $*$ は $P^* = \{i \in N \mid P \in J_i\}$，すなわち P をアクセプトするグループである。

• 連言∧および含意→の解釈 $*$ は，通常の集合論的意味論と同じである。$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \cap \psi^*$ であり，また $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \varphi^* \rightarrow \psi^* = \{i \in N \mid \{i\} \cap \varphi^* \subseteq \psi^*\}$ である。とくに，$(\neg\varphi)^* = \varphi^* \rightarrow \bot^*$ であり，⊥は矛盾を表す定項である。

• ⊥の解釈は，特定の原子論理式 Q の解釈と同一であり，$\bot^* = Q^*$ である。ただし，$\bot^* \neq N$ とする。

このような解釈のもとで，各判断集合 J_i を，(1) $\varphi \wedge \psi \in J_i$ if and only if $\varphi \in J_i$ and $\psi \in J_i$，(2) $\varphi \rightarrow \psi \in J_i$ if and only if $\varphi \in J_i$ implies $\psi \in J_i$ を満たすものとすれば，一般の論理式について $\varphi^* = \{i \in N \mid \varphi \in J_i\}$ が成り立つ。

このような集合論的意味論では，$\vdash_N \varphi$ と $\vdash_N \neg\varphi$ は両立し得ないが，$\vdash_\alpha \varphi$ と $\vdash_\alpha \neg\varphi$ は一般には両立し得る。矛盾⊥の解釈が必ずしも空集合とは限らないためである。

多数決 mv 規則に対してそのまま集合論的な解釈を与えるのは困難だが，たとえば（Eckert and Herzberg, 2009; Klamler and Eckert, 2009）のような代数上の準同型写像等によって与えることができると考えられる。

また，このような意味論と推論システムの対応を考える際には，推論規則として以下の res 規則を推論システムに加える必要がある。

res 規則（**Restriction**）：$\beta \subseteq \alpha$ のとき，

$$\frac{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\alpha \varphi}{\sigma_1, \ldots, \sigma_k \vdash_\beta \varphi}\, res$$

α のメンバーが φ をアクセプトするときには，α のサブグループである β のメンバーも φ をアクセプトすることを意味している。

6　補論

本節では本稿の補論として，6.1 節で一般的なアジェンダの諸条件について，また 6.2 節で不可能性定理の証明の概略について記しておく。

6.1　アジェンダの諸条件と Arrow の定理

本稿では，アジェンダには特別な条件を課さずに，集約規則に対して Monotonicity と Intersection closed の条件を課した。これらは一般にはより基本的な条件から導かれる集約規則の性質である。たとえば，（Dietrich and List, 2007）は，判断集約理論における不可能性定理から Arrow の定理を導くために，アジェンダに対して以下の Path-connected と Minimally connected の条件を導入している。これらの条件は，非常にテクニカルな形をしているが，Arrow の定理およびその証明を一般化する上で，そこに用いられている選好関係およびその性質に対応するものが抽出され一般化されているのである。（List and Polak, 2010）では，Arrow の定理の証明の概説を通して，対応する判断集約理論での諸条件が考察されている。

〔**Path-connected**〕論理式の集合 $X \subseteq \mathcal{A}$ と論理式 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ について，$X \cup \{\varphi\}$ および $X \cup \{\psi\}$ は無矛盾であるが，φ と $\neg\psi$ を加えた集合 $X \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ は矛盾するとき，$\varphi \models^* \psi$ と表す。（$\models^*$ は，先に導入した論理的帰結関係 $\models$ の特殊形である。）

アジェンダ $\mathcal{A}$ が **Path-connected** であるのは，互いに無関係な（つまりそれぞれ独立に真であり偽でありうるような）すべての論理式 $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ について，ある $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{A}$ で，$\varphi \models^* \sigma_1 \models^* \cdots \models^* \sigma_k \models^* \psi$ となるものが存在するときである。（ここで，$\varphi \models^* \sigma_1 \models^* \sigma_2$ は，$\varphi \models^* \sigma_1$ かつ $\sigma_1 \models^* \sigma_2$ の省略表現である。）

〔**Minimally connected**〕矛盾している論理式の集合 X について，X から論理式を一つでも除いたどんな部分集合 $Y \subseteq X$ も無矛盾となるとき，X は minimally inconsistent であるという。たとえば，$\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$ は，これ自体は矛盾しているが，どれか１つでも論理式を除外してできる部分集合 $\{\varphi, \psi\}$ や $\{\varphi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$，$\{\varphi\}$ 等は無矛盾である。したがって，$\{\varphi, \psi, \neg(\varphi \wedge \psi)\}$ は minimally inconsistent である。

アジェンダ $\mathcal{A}$ が **Minimally connected** であるのは，以下の２つの条件が満たされるときである。(1) $|X| \geq 3$ となる minimally inconsistent な部分集合 $X \subseteq \mathcal{A}$ が存在する。(2) minimally inconsistent な部分集合 $Y \subseteq \mathcal{A}$ で，$(Y - Z) \cup \{\neg\varphi \in \mathcal{A} \mid \varphi \in Z\}$ が無矛盾となるような偶数個の論理式からなる部分集合 $Z \subseteq Y$ が存在する。

(Dietrich and List, 2007) では，上記のようなアジェンダのもとで，以下の形の不可能性定理を証明している。

定理 6.1（不可能性定理） $\mathcal{A}$ を Minimally connected でなおかつ Path connected なアジェンダとする。集約規則 F が Collective rationality，Unanimity，Independence を満たすとき，F は独裁的である。またその逆も成り立つ。

１階述語論理の部分体系としての選好関係の論理におけるアジェンダを **preference agenda** と呼ぶ。すなわち preference agenda とは，$a>b$ および $\neg(a>b)$ という形の論理式のみからなるアジェンダである。Arrow の定理における preference agenda は，一階述語論理の論理式から成る Minimally connected で Path connected なアジェンダの一種であることが確かめられる (Dietrich and List, 2007)。よって，Arrow の定理は判断集約理論における不可能性定理 6.1 の系（特殊形）として得られる。

系 6.2（Arrow の定理） アジェンダ $\mathcal{A}$ を preference agenda とする。集約規則 F が Collective rationality，Unanimity，Independence を満たすとき，F は独裁的である。またその逆も成り立つ。

6.２　不可能性定理の証明の概略

本節では，本稿で導入した Monotonicity および Intersection closedness の条件が不可能性定理の証明にどのように用いられるかを見るために，決定的なグループすべての集合 $\mathcal{W}$ が ultrafilter をなすことの証明を簡単に追っておく。以下の証明はとくに，(Eckert and Herzberg, 2009; Klamler and Eckert, 2009) を参考にしている。

N のメンバーの間には，さまざまなグループがありうる。そのようなグループの集まりを考えたときに，それが以下の条件を満たすとき，そのグループの集まりは ultrafilter と呼ばれる。

定義 6.3（Ultrafilter） N のメンバーからなるいくつかのグループの集まりを X とする。

- 任意のグループ α, β について以下の条件を満たすときに X は **superset closed** であるという。

$$\alpha \in X \text{ かつ } \alpha \subseteq \beta \text{ ならば } \beta \in X$$

X に属しているグループについては，それより大きいグループもすべて X に属しているということである。

• 以下の条件を満たすときに X は **intersection closed** であるという。

$$\alpha, \beta \in X \text{ ならば } \alpha \cap \beta \in X$$

X に属しているグループ α と β については，その共通メンバーからなる集合 $\alpha \cap \beta$ も X に属しているということである。

• 以下の条件を満たすときに X は **complete** であるという。

$$\alpha \notin X \text{ ならば } N - \alpha \in X$$

あるグループ α が X に属していないときには，そのグループに属さないすべてのメンバーからなるグループ（補集合）$N - \alpha$ が X に属しているということである。

• superset closed で intersection closed であり，なおかつ $\emptyset \notin X$ を満たす X は **filter** と呼ばれる。

• X が complete な filter のとき，X は **ultrafilter** と呼ばれる。

注 6.4 任意のグループ $\alpha \subseteq N$ は，ある $\vec{J}$ とある $\varphi \in \mathcal{A}$ について，$\alpha = \vec{J}(\varphi)$ の形に書くことができる。なぜなら，適当な $\varphi \in \mathcal{A}$ を選んで，α のメンバー全員が φ をアクセプトし，その他の全員，すなわち $N - \alpha$ のメンバー全員が φ をリジェクト，すなわち $\neg\varphi$ をアクセプトするようにプロファイル $\vec{J}$ を設定することができるからである。

定理 6.5（Ultrafilter） 集約規則 F のもとで決定的なグループすべての集合 $\mathcal{W}$ は，*ultrafilter* である。

この定理は，以下の補題 6.6，6.7，6.8，6.9 の帰結である。

補題 6.6 任意のプロファイル $\vec{J}$ と任意の論理式 $\varphi \in \mathcal{A}$ について，

$$\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W} \text{ if and only if } \varphi \in F(\vec{J})$$

Proof. ⇐）$\varphi \in F(\vec{J})$ とすると，$\mathcal{W}$ の定義から，$\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W}$ である。
⇒）$\vec{J}(\varphi) \in \mathcal{W}$ とすると，ある $\vec{J}^*$，ψ について，$\vec{J}(\varphi) = \vec{J}^*(\psi)$ かつ $\psi \in F(\vec{J}^*)$ であり，**Systematicity** から $\varphi \in F(\vec{J})$ である。 ■

補題 6.7 $N - \vec{J}(\varphi) = \vec{J}(\neg\varphi)$

Proof. $i \in N - \vec{J}(\varphi)$ とすると，$i \notin \vec{J}(\varphi)$，すなわち $\varphi \notin J_i$ である。⇒は，J_i の完全性から，逆に⇐は J_i の無矛盾性から，$\neg\varphi \in J_i$ であり，すなわち $i \in \vec{J}(\neg\varphi)$ である。 ■

補題 6.8（Complete）

$$\alpha \in \mathcal{W} \text{ if and only if } N - \alpha \notin \mathcal{W}$$

Proof. ⇒）α, $N - \alpha \in \mathcal{W}$ とする。$\alpha = \vec{J}(\varphi)$ とすると，$i \in \alpha$ は全員 $\varphi \in J_i$ であり，$k \in N - \alpha$ は全員 $\varphi \notin J_k$ である。J_k の完全性から，$k \in N - \alpha$ は全員 $\neg\varphi \in J_k$ である。

α, $N - \alpha \in \mathcal{W}$ だから，$\varphi \in F(\vec{J})$ かつ $\neg\varphi \in F(\vec{J})$ となるが，これは $F(\vec{J})$ が矛盾することを意味し，**Collective rationality** に反する。よって，$\alpha \in \mathcal{W}$ ならば，$N - \alpha \notin \mathcal{W}$ である。
⇐）$\alpha \notin \mathcal{W} \Rightarrow N - \alpha \in \mathcal{W}$ を示す。

$\alpha = \vec{J}(\varphi)$ で，$\alpha \notin \mathcal{W}$ と仮定すると，$\varphi \notin F(\vec{J})$ である。すると，$F(\vec{J})$ の **Collective rationality** から，$\neg\varphi \in F(\vec{J})$ であり，補題 6.6 から，

$\vec{J}(\neg\varphi) \in \mathcal{W}$である。各$J_i$の完全性・無矛盾性から，$\vec{J}(\neg\varphi) = N - \alpha$であり，よって$N - \alpha \in \mathcal{W}$である。 ■

補題 6.9（Intersection closed） $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ならば，$\alpha \cap \beta \in \mathcal{W}$

Proof. $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$とすると，$\mathcal{W}$の定義から，ある$\vec{J}$と$\varphi$について，$\alpha = \vec{J}(\varphi)$で$\varphi \in F(\vec{J})$である。また，$\beta$についても同様に，ある$\vec{J}^*$と$\psi$について，$\beta = \vec{J}^*(\psi)$で$\psi \in F(\vec{J}^*)$である。したがって，$\alpha \cap \beta = \vec{J}(\varphi) \cap \vec{J}^*(\psi)$であり，**Intersection-closedness** より，あるプロファイル$\vec{I}$と論理式σについて，$\vec{J}(\varphi) \cap \vec{J}^*(\psi) = \vec{I}(\sigma)$かつ$\sigma \in F(\vec{I})$である。したがって，再び$\mathcal{W}$の定義から，$\alpha \cap \beta = \vec{J}(\varphi) \cap \vec{J}^*(\psi) \in \mathcal{W}$である。 ■

Superset closed も，**Monotonicity** の条件から同様に導かれる。

（参考文献）

小野寛晰（1994）『情報科学における論理』日本評論社。

佐伯胖（1980）『「きめ方」の論理－社会的決定理論への招待－』東京大学出版会。

坂井豊貴（2013）『社会的選択理論への招待 : 投票と多数決の科学』日本評論社。

鈴村興太郎（2012）『社会的選択の理論・序説』東洋経済新報社。

Arrow, Kenneth J.（2012）*Social Choice and Individual Values*, Third Edition,Yale University Press.

Arrow, Kenneth J., Amartya K. Sen and Kotaro Suzumura（2002）*Handbook of Social Choice and Welfare Volume 1*, Elsevier.

Buss, Samuel R.（1998）“An Introduction to Proof Theory,” in S.R. Buss（ed.）*Handbook of Proof Theory*, Elsevier, pp.1-78.

Campbell, Donald E. and Jerry S. Kelly（2002）“Impossibility theorems in the arrovian framework,” in *Handbook of Social Choice and Welfare Volume 1*,pp.35-94.

Dietrich, Franz and Christian List（2007）“Arrow’s theorem in judgment aggregation,” *Social Choice and Welfare*, Vol.29, No.1, pp.19-33.

Dietrich, Franz and Philippe Mongin（2010）“The premise-based approach to judgment aggregation,” *Journal of Economic Theory*, Vol.145, No.2, pp.562-582.

Dokow, Elad and Ron Holzman（2010）“Aggregation of binary evaluations,” *Journal of Economic Theory*, Vol.145, No.2, pp.495-511.

Eckert, Daniel and Frederik Herzberg（2009）“Systematic judgment aggregators:An algebraic connection between social and logical structure,” in G.Bonanno and J. Delgrande and H. Rott（eds.）*Information processing, ra-tional belief change and social interaction*, Dagstuhl Seminar Proceedings 09351, pp.1862-4405.

Gentzen, Gerhard（1934）“Untersuchungen über das logische Schließen,” *Math-ematische Zeitschrift*, Vol.39, pp.176-210, pp.405-431. English Translation:“Investigations into logical deduction,” in M. E. Szabo（ed.）*The collected Papers of Gerhard Gentzen*, 1969.

Grossi, Davide and Gabriella Pigozzi（2014）*Judgment Aggregation: A Primer*, Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning.

Klamler, Christian and Daniel Eckert（2009）“A simple ultrafilter proof for an impossibility theorem in judgment aggregation," *Economics Bulletin*, Vol.29, No.1, pp.319-327.

List, Christian (2012) "The theory of judgment aggregation: An introductory review," *Synthese*, Vol.187, No.1, pp.179-207.

List, Christian and Philip Pettit (2004) "Aggregating sets of judgments: Two impossibility results compared," *Synthese*, Vol.140, No.1-2, pp.207-235.

List, Christian and Ben Polak (2010) "Introduction to judgment aggregation," *Journal of Economic Theory*, Volume 145, Issue 2, pp.441-466.

List, Christian and Clemens Puppe (2009) "Judgment aggregation: A survey," in C. List and C. Puppe (eds.) *Handbook of Rational and Social Choice*, Oxford University Press.

Nehring, Klaus (2005) "The (Im) Possibility of a Paretian Rational," *Economics Working Papers 0068*, Institute for Advanced Study, School of Social Science.

Nehring, Klaus and Clemens Puppe (2010) "Abstract Arrowian aggregation," *Journal of Economic Theory*, Vol.145, No.2, pp.467-494.

Porello, Daniele (2017) "Judgement aggregation in non-classical logics," *Journal of Applied Non-Classical Logics*, Vol.27. No.1-2, pp.106-139.

(Abstract)

We review Condorcet's paradox and discursive paradox, which show that the majority voting and logical reasoning may be in conflict. We further review, in the framework of the judgement aggregation theory, the impossibility theorem and Arrow's theorem, which are developed based on the investigation of the paradox. To investigate the paradox in view of proof theory, we introduce an inference system that contains the majority voting as an inference rule. In the framework of proof theory, we investigate premise-based and conclusion-based approaches to avoid the paradox, which are discussed in the literature on the judgement aggregation theory.